BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
12
32 B
7h

Digitized by Google

12-51-13-
I

ELEMENTA GEOMETRIÆ,

In quibus
ethodo brevi ac facili ſumme neceſſaria ex *Euclide*, *Archimede*, *Apollonio*, & nobiliſſima veterum & recentiorum Geometrarum inventa traduntur

Per
P. IGNAT. GASTON PARDIES. *S.J.*
Gallico Idiomate conſcripta.

Poſt Tertiam Editionem
Latinitate Donata & JENÆ edita
In Uſum Studioſæ Juventutis.

AC. OX.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

OXONIÆ,
Typis *Leon. Lichfield*, Impenſis JOH. WILMOT, Bibliop. 1694.

14-21.A.13

12.32.B.7

Digitized by Google

Viro Illuſtri

NICOLAO CHRISTOPHORO

LYNCKERO,

JCTO, Hæreditario Domino in Kötſchau, in Aula Saxo-Iſenacenſi & Regimine Tutelari Jenenſi Conſiliario Excellentiſſimo, Judicii Provincialis & Scabinatus Aſſeſſori, Collegii Juridici Seniori & Profeſſori Primario, Academiæ Salanæ hodie

RECTORI MAGNIFICO,

Patrono Obſervantiſſime Colendo

Perpetuam Felicitatem!

I*Gnoſce homini ad Themidos ſacraria proruenti. Gallus eſt, cui natura liberiorem indulſit ge-*

a 3 *nium.*

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

nium. Non tamen miles, qui Tuos turbaret circulos, ſed mathematicus audit jamdudum doctorum volitans per ora virum. Hic poſtquam natale reliquit ſolum, mutato habitu, quod Jeſuitis ſolenne eſt, Germaniam perluſtrare conſtituit. Abhorret nihilominus eadem cum maleficis ſede locari; cum patris non promittat funus neque principum inquirat in annos; ſed mare & terram, numeroque carentem arenam metiri doceat. A me igitur, cui hactenus familiaris fuit, enixe petiit, ut Patronum conciliarem, ſub cujus tutela exterus apud exteros ſecurus vivere poſſet. Diu non deliberavi, ſed magnificum nomen Tuum ad id exorandum eſſe dixi. Dictum. Factum! Quapropter in

me

me converte iras, ſi quicquam in audendo peccatum fuit. Simul tamen reputa, ſummum Tuum favorem, quem ſine ullis meæ tenuitatis axiomatibus per ſola poſtulata novo plane ac ſingulari conamine mihi demonſtraſti, primos ſubjeciſſe igniculos. His enim obſervantia mea excitata, hanc ſibi legem latam putavit, etiam otii & partium noctis rationem Tibi ſoli reddere: In Gallia quidem Auctor Chinenſes, Europæis populis ſi Dis placet oculatiores, imitatus operam ſuam omnibus Academiæ Regiæ membris, tanquam judicibus, obtulit: Nunc vero eadem defertur ad Academiæ noſtræ caput, quia Te ſolum ampliſſimum laboris hujus theatrum eſſe exiſtimavi. Suſcipe igitur Vir Illuſtris

ſerenâ fronte, quod animo devoto calidiſque omnigenæ felicitatis votis offero, & futuris quoque temporibus perpetuum Nominis Tui cultorem benevolentiæ Tuæ radiis bea. Jenæ die 14. Martii cIɔ Iɔc LXXXIV.

Illuſtri Nomini Tuo

Devotiſſimus

INTERPRES.

L. B.

ELementa Geometriæ magna facilitate demonſtrata hic accipis. Poſſunt ea omne tædium, quod incipientibus ex prima Euclidis lectione oritur, pleniſſime tollere. Erubui ſæpius, quando in explicatione Euclidis ab auditoribus mihi objiciebatur, cur hæc per ſe nota demonſtrantur, cur non breviori via id fit? &c. Cœpi igitur evolvere varios Euclidis commentatores, ſed alii prolixitate nimia, alii dum breves eſſe voluerant, obſcuritate laborabant, ad unum vero omnes ordini Euclideo ſtricte inhærebant. Tandem incidi in præſentem auctorem, cujus labor deſideriis incipientium ex aſſe ſatisfacere videtur. Abſit tamen, ut hoc ipſo Studioſæ Juventuti Euclidem è manibus excutiamus, aut quicquam ejus laudi detrahamus. Manebit illa ſemper illibata, quamdiu nomen mathematici eruditorum ordini inſertum erit.

Vi-

Viam potius planiorem reddet hoc opus, ut ad ipſa Euclidis adyta pervenire queamus. Hoc igitur cum noſtrum ſit propoſitum, interpretatio præſens æquum ſperabit judicem. Fateor regulas bonæ interpretationis geniumque linguæ Gallicæ non ſemper obſervatum fuiſſe. Et qui fieri aliter potuit, cum ſtans quaſi pede in uno & aliis quam plurimis diſtrictus, unice in commodum quorundam DNN. Commilitonum eam abſolverim. Si Deus majora nobis dederit otia, facile cuncta ad limam revocari poterunt. Vale & labori fave.

PRÆ-

PRÆFATIO.

QUI conferent exiguam libelli hujuſce molem cum inſcriptionis ſuæ magnitudine, primo fortè intuitu abſterrebuntur inæqualitate, quæ inter utramque eſt; & timendum eſt, ne illi omnia hæc promiſſa adeò eximia habeant pro verbis audacioribus hominis qui facilè ſuſcipiat quæ præſtare non poſſit: ſed hos ego rogatos velim, ſuſpendant paulùm judicium ſuum, ac conſiderent in præſentia nonniſi dimidium horum Elementorum dari, & de ſedecim libris, quibus illa abſolvi debent, nonniſi novem nunc publicari, quoniam reliqui, abſtruſiora atque eminentiora Geometriæ inventa explicantes, incipientibus hanc artem addiſcere non adeò neceſſarii ſunt. Interea in primis hiſce libris non omittuntur quæcunque pulcra habentur in quindecim libris Euclidis, & præterea quæ Archimedes de quadratura circuli demonſtravit, Lunæ Hip-

Hippocratis, Logarithmi, Sinus, & alia quædam ejuſdem generis. Videbitis hic mirabiles numerorum proprietates quas Euclides in ſeptimo, octavo & nono Elementorum ſuorum demonſtravit. Diſcetis hic demonſtrationem magnitudinum incommenſurabilium, *quæ fortè maximus eſt conatus cujus capax ſit humana mens, quoniam dum ſcrutatum abit uſque ad poſſibilitatem rerum, tantâ cum claritate ac perſpicuitate id quod eſt & quod non eſt detegit; & quod in infinita multitudine comparationum, quas omnes obſervat tanquam poſſibiles inter duas magnitudines, demonſtrat immobili quadam certitudine, neque ipſum Deum videre earum unam aptam quam ſuppeditet ut communem menſuram duarum harum magnitudinum. Verumenimvero licet hæc demonſtratio pulcra ſit, fatendum tamen eſt, eam ſatis eſſe difficilem; ii quibus inventionem tantam debemus, non aliud nobis iter oſtenderunt, quam quo ipſi fuerant uſi, aut quod reverà aliud non noſſent, aut quod hac ratione voluerint partem laboris, quò defuncti fuerant nos quo-*

que

que experiri & ſimul guſtare tanto majori cum gaudio delicias novi hujus mundi, quanto majori cum labore eò perveniſſemus. Quodcunque ſit, hæc via adeò longa plenaque difficultatum eſt, ut pauci, qui aut conſtantiæ ſatis ad ferendum ejus tædium habeant, aut virium ad ſuperandas moleſtias inveniantur. Neſcio an auſim dicere me ſatis fuiſſe felicem in detegendo novo itinere. Nec tamen admodum magnæ id mihi laudi foret: interdum audaculus nauta felicior eſt in nova quadam detectione, quam peritiſſimus navarchus, fortunaque idem in tempeſtate reperire ſinit, quod nemo perfectiſſima, quæ de re nautica haberi poteſt, cognitione detegere potuiſſet. Sic etiam contingere potuiſſet ut vaſta hæc Geometriæ maria percurrens, ſorte quadam offendiſſem novum aliquod iter & magnis hominibus qui me præceſſerunt incognitum. Nihilominus bonam hanc fortunam mihi attribuere non ſtudeo; illud tamen minimum jure dicturus ſum, viam quam ego ingredior, iturus ad Incommenſurabiles, breviſſimam eſſe atque facilimam, ita ut exigua attentione,

tione, quæ quatuor aut quinque ſaltim parvarum pagellarum lectioni dicanda eſt, exactè aliquis comprehendere poſſit rem quam pauciſſimi, etiam ex iis qui ſe Geometriæ penitus dedunt, intelligere queunt.

Poſthæc de diverſis progreſſionum generibus ago, ac peculiariter duabus magis celebribus, quæ ſunt Geometrica & Arithmetica, inſiſto; eaſque inter ſe conferens Logarithmorum quoque tractationem ſuſcipio, eorumque artificium oſtendo mediante linea aliqua Geometrica, quæ admodum utilis erit ad reſolutionem Problematum Algebraicorum de omnis generis dimenſionibus. Hæc eſt illa linea quacum olim quadrare potui Hyperbolen; & quod non ita pridem amicorum quidam in Diario ſive Actis Eruditorum Angliæ de iis, quæ de hac materia à peritiſſimis Geometris publici juris facta ſunt, oſtendit, adeò me non occupavit, ut potius cogitationem mihi injecerit, eos noluiſſe omnia quæ de hac re dici poſſent, nobiſcum communicare. Finio autem primam hanc partem praxi Geometrica; quæ deberet contineri ulti-

mo demum Elementorum omnium libro. Præter operationes faciliores communiores que, trado hic principia menſurandi magnitudines & diſtantias locorum inacceſſibilium, conficiendi tabulas Topo- & Chorographicas; inveniendi ſinus, tangentes & ſecantes omnium angulorum; ac tandem notitiam omnium eorum quæ ad hanc partem, quæ Geometria Practica vocatur, pertinent.

Poſthæc totidem libris tradam Algebram, Sectiones Conicas, Sphæricas, & Staticam; ſed ante omnia quinque aut ſex generales regulas ſtabiliam, e quibus deinceps, tanquam per corollaria, demonſtratio infinitarum propoſitionum, quæ prō palmariis in Geometria habentur, trahitur. Inde natura invenietur & menſura ſpatiorum Aſymptoticorum, quorum cognitio res eſt omnium maxime admirabilis, & quæ clariſſime magnitudinem ac ſpiritualitatem animæ noſtræ oſtendit; ſiquidem hæc ſolo ſpiritus ſui lumine ultra infinitum penetrans, adeo clarè res, quas nulla ſenſuum experientia eam docere, nullaque corporea facultas percipere

cipere ſaltem poteſt, detegit. Spatia hæc ſunt extenſionis actu infinitæ, comprehenſa inter duas lineas, quæ prolongatæ, in infinitum, non ſe unquam offendunt; unde ipſis nomen Aſymptotorum eſt. Interim hic demonſtratur, hæc ſpatia quoad longitudinem infinita, nihilominus circulo alicui aut alteri figuræ determinatæ æqualia eſſe: ita ut Infinitum ipſum, quam immenſum & quam innumerabile etiam illud eſt, nihilo ſecius ad calculum atque menſuram Geometriæ reducatur, & anima noſtra, major adhuc illo, id comprehendere queat. Ex omnibus naturalibus, quas homo propria ratiocinatione acquirere poteſt, notitiis ſine dubio hæc Infiniti comprehenſio maximè eſt admirabilis: neque quicquam ego aptius video quod de animæ noſtræ exiſtentia nos convincat, atque doceat, ultra materialem facultatem qua nobis res imaginamur medio organorum, eſſe nobis aliquam planè ſpiritualem ad cogitandum & ratiocinandum, quam omnium Philoſophorum maximus potentiam aliquam ab organis independentem, ſeparatam à materia, & aliunde

unde quā à corpore venientem *appellat. Certè, quantaſcunque etiam vires intendemus, ut nobis infinitum imaginemur, ad extremum tamen ejus nunquam veniemus; & quamdiu in ſola ejus imaginatione nos detinebimus, formare ſeu concipere quidem nobis poterimus ſpatium aliquod vaſtæ diſtentionis, illud tamen ſemper erit determinatum: ſiquidem cum imaginatio, ut propriè loquamur, corporea quædam ſit potentia, quæ objecta non niſi per phantaſmata ac ſpecies ſenſibiles nobis repræſentat, ea ipſa, inſtar corporis, in repræſentationibus ſuis determinata eſſe debet. Et quemadmodum tabula aliqua oculis noſtris quandam extenſionem actu infinitam ſubjicere nequit, quia id quod limitibus in certo aliquo ſpatio circumſcriptum eſt id quod terminos nullos habet continere non poteſt: ita etiam Imaginatio quæ nihil aliud eſt quam tabula repræſentans imagines revera ſatis ſubtiles, ſed ſemper materiales, non niſi corporeas atq; limitibus comprehenſas res nobis oſtendere poteſt, cum tota infiniti immenſitas picturæ alicujus corporeæ*

 ter-

terminis contineri nequeat. Imaginatio igitur eo uſque non attingit, ut nobis infinitum repræſentet. Sed aliunde demonſtratio quam de natura & proprietatibus immenſæ hujus atque infinitæ extenſionis aſymptoticæ inſtituimus, nos pariter omnes convincit, haberi intra nos facultatem, quæ idonea ſit hanc infinitam extenſionem nobis repræſentare. Quemadmodum enim ut regulâ atque circino figuram in charta delineatam metiar, opus eſt me eam figuram præ oculis atque ad manus habere, quò inſtrumenta ad angulos ejus atque latera applicans, omnes ejus dimenſiones ſumere, & ſic magnitudinem illius determinare poſſim; ita etiam ut rationis meæ regulâ menſuras ſpatii hujus aſymptotici ſumere queam, neceſſe eſt, ut ejus ideam aliquam intimè animo meo præſentem habeam; & ut idem animus, liceat ita loqui, huic ideæ atque interiori figuræ ſe applicans, ejus dimenſiones accipiat, magnitudinem determinet, atque omnes ejus proprietates demonſtret. Neceſſum itaque eſt ut agnoſcamus claras & diſtinctas infinitæ alicujus extenſionis ideas &

repræſentationes nos in nobis habere; & per conſequens eam facultatem quæ ita nobis repræſentat id quod corpus nullum repræſentare poteſt, eſſe potentiam quandam purè ſpiritualem & à materia diſtinctam: adeò ut Geometria unica quadàm demonſtratione ſimul aliquam maximè admirabilium naturæ proprietatum, eòdemque tempore unam è duabus maximi momenti veritatibus Moralibus probet.

Audebone ulterius etiam progredi, & dicere in hac ipſa demonſtratione invictum quoque argumentum exiſtentiæ, Dei repiriri? Novi equidem divinam naturam abyſſum eſſe luminis, quod paſſim ſe diffundit, & in cæciſſimorum etiam atque ſtupidiſſimorum animis ſeſe inſerit: ſed nec minus novi, quouſque progreſſa ſit Libertinorum impietas, qui cum propriæ ac internæ refutationi reſiſtere, aut ſibi ipſis reſpondere nequeant, extrinſecus tamen aliorum demonſtrationes eludere, intricato negotio de æternitate ſe munientes, conantur; & in tuto ſe eſſe ſub infinita hac cauſarum dependentium multitudine, ac refugii locum

nunquam non invenire in æterna ſerie diverſarum productionum, arbitrantur. Verùm Geometria, manifeſto quodam aſymptotorum exemplo, invicto argumento demonſtrat, quod etiam in hac ipſa, quam prætendunt, cauſarum ſubordinatarum & dependentium unius ab altera in infinitum ſerie neceſſario veniendum ſit ad primam aliquam naturam, quæ cum omnibus his cauſis particularibus cum concurrat, omnibuſque temporibus correſpondeat, quoque ipſa ſit infinita & æterna, & quæ licet non ſola ullam harum cauſarum ſine concurſu & determinatione aliarum producat, nihilominus generalis, quæ res omnes producit conſervatque, cauſa exiſtat.

Fortè, poſt hæc omnia, non nemo cogitabit me res hîc in epitome ſolùm tradere, hancque Geometriam iis quidem, quibus jam cognita eſſet hæc ſcientia, memorialis libelli loco futuram, non verò inſtituturam eos, qui eam addiſcere cupiunt. Sed profiteor longè ab intentione mea hoc abeſſe, quæ nunquam fuit epitomen conficere: ſemper enim præ me tuli Geometriam conficere,

cere, quæ incipientibus inſerviret, & ex qua illi etiam qui nunquam de Mathematicis rebus quicquam audiviſſent, brevi admodum tempore, non ſolum quod ſummè neceſſarium eſt in Geometria, ſed ſubtiliora quoque addiſcere poſſent. Non ignoro libros in hac materia breviſſimos non eſſe clariſſimos; atque in magno numero eorum, qui nobis lectionem atque cognitionem Euclidis faciliorem reddere voluere, plurimi ſatis ejus volumen minuerunt; propterea tamen non omne tempus quo ad eum intelligendum opus eſt, abbreviarunt.

Inter omnes Commentatores, maxime prolixus eſt, meâ quidem opinione, Clavius, Pater Fournier verò breviſſimus; nihilominus perſuaſum mihi eſt, longiori tempore opus eſſe ad mediocriter intelligendum Euclidem in Patre Fournier, quam in Clavio: adeò verum eſt, in Geometria ſtudii, ac laborum tempus non magnitudine aut parvitate voluminis metiendum eſſe. Itaque in inſtituto, quod erat, medium Scientiam hanc cum maxima qua poſſet facilitate addiſcendi tradere, non tam in ſcriptis brevis eſſe, quàm ut in modo proceden-

di facile intelligerer ſtudui; ſique hic libellus exiguus admodum apparet, non tàm illud brevitati demonſtrationum particularium adſcribendum erit, quam methodi generalis facilitati. Notandum enim eſt inter ea, quæ difficilem ac tædioſam Euclidis & vulgarium Autorum lectionem faciunt eſſe & illud, quod dum in ſummô illo rigore, quô nihil quod demonſtrari poſſit, quàm facile aliàs etiam appareat, ſine demonſtratione abire ſinunt, ſæpè accidit ut quod clarum fuiſſet, ſi animo id quale naturaliter videbatur propoſuiſſe ſatis habuiſſemus, poſtea difficile ac intricatum evadet, quando ad demonſtrationem regularem id reducere volumus. Imò & hoc obſervabis in Euclide, ut demonſtret propoſitionem aliquam magni momenti, longam adhibere propoſitionum ſeriem, quæ propriè nulli ſunt uſui quã ad probandam principalem hanc propoſitionem. Si itaque ſolâ explicatione ut veritas perſpiciatur efficere poſſumus, abſque eo ut laboremus demonſtrare id de quo plenè convicti ſumus, & ſermones inſumamus, qui non videntur aliud facere, quam nos dedocere id quod

igno-

ignorare non poſſumus, laborè hoc certè ſuperſedebimus. Pari modo, ſi una vice omnes hæ principales atque magni momenti propoſitiones, abſque adhibita longa illa demonſtrationum ſerie, tantiſque apparatibus, demonſtrari poſſunt, habebimus procul dubio medium res inutiles reſcindendi: atque hoc eſt illud, quod ego me pluribus in locis præſtitiſſe arbitror, dum in unica quadam propoſitione demonſtro, quod aliàs non niſi tædioſâ illâ aliarum propoſitionum ſerie probatum fuit. Aliud, quo uſus ſum, medium abbreviandi, eſt res ad generalia certa principia reducere; quod non in hoc ſolùm libro feci, ubi per quinque ſexve regulas univerſales ferme infinitum numerum palmariarum propoſitionum demonſtro, ſed in multis aliis etiam locis, veluti quando de Sectionibus Conicis agens, quatuor illarum proprietates per unam proprietatum, quæ unicæ alicui ſectioni peculiaris eſt, demonſtro. E.g. eas omnes ſub proprietatibus Ellipſeos conſiderans, dico Circulum eſſe ellipſin, cujus duo foci ſe tangunt; Parabolam eſſe ellipſin, cujus duo foci ſunt in infinitum à

ſe invicem diſtantes; & Hyperbolen eſſe ellipſin cujus foci magis quam infinitum diſtant: quod optime procedit ac bene percipi poteſt, velut illo in loco explico.

Nonneminem ſine dubio malè habebit quod conſuetam methodum definitiones, principia & propoſitiones collocandi deſeruerim; ac forſan ille me Geometriæ, ſublatis illis, quæ ei ſemper dignitatem accuratiſſimæ ſcientiæ dederunt, injuriam facere credet. Alius quidam reprehendet, quod adhuc vetuſtos quoſdam demonſtrandi modos retinuerim, poſtquam moderni, per expolitam illam hujus in quo vivimus temporis rationem, demonſtrationes multo magis naturales *dederunt, atque differentiam, quæ eſt inter* illuminare animos *atque* eos covincere, *oſtenderunt. Objicietur mihi porrò, quod in pluribus negligentior fuerim; quod multas propoſitiones abſque quod eas demonſtrem præterierim; quod ſæpè loca, quæ non directè id quod in quæſtione eſt probant, citem; quod indifferenter* Converſa *& propoſitione ipſa utar. Ad hæc omnia verbo uno reſpondeo, me,*

cum

cum Geometriam cum omni qua fieri poſſet facilitate docere inſtituiſſem, hanc viam, quam inſtiti, maximè idoneam inveniſſe: quod non obſtabit, quo minus bonas hominum harum rerum peritorum de me opiniones lucrifaciam.

Interim animadverto, me dum omnimodam brevitatem hujus Opuſculi promitto, nimis longum in Præfatione eſſe. Veruntamen non me detineo in oſtendendis magnis Geometriæ utilitatibus; id ſolùm dico, eam ſi unquam in Scientiis naturalibus aut Artium praxi commodi quicquam attulit, nunc certe & his & illis ſumme eſſe neceſſariam. Notum eſt quouſque ſeculo noſtro artium perfectio prolata ſit, & quantâ cum indagine res occultiſſimæ in Phyſica perpendantur. Eo modo quo his temporibus Phyſica docetur, Geometria æquè ac Mechanica, quæ nihil aliud eſt quam Geometria ad motum localem applicata, neceſſaria eſt, & qui maximâ hodie famâ clari ſunt, ab iis qui harum duarum cognitione inſtructi non ſunt, intelligi nequeunt. Quod Mechanicam attinet, ejus Elementorum, in diſſertatione de motu locali,

quam

quam meam profiteri non eſt quod pudeat, jam tradidi partem; atque ſpero cum eo quod hoc libro de Geometria nunc publici juris facio, duo magna haberi poſſe adminicula per quæ Phyſica, prout nunc traditur, intelligatur, recteque de ea judicetur. Fortaſſis etiam obſervare licebit eos, quibus honori eſt Philoſophiam ſuam Geometriæ atque Mechanicæ fundamentis ſuperſtruxiſſe, non ſemper bene eſſe fundatos; & illud ipſum quod doctrinæ eorum incrementa dedit, inſervire poterit ad errores eorum agnoſcendos. Porro Lectorem moneo, me nullo modo eorum, quæ hoc opuſculo traduntur, auctorem haberi velle; undique quæ mihi placuerunt collegi: ac ſi quis heic quicquam reperiat quod à ſe inventum putet, aut ab alio quopiam, audacter id arripiat, Autorive ſuo attribuat, lubens ego conſentio, nec litem ei ullam movebo. Quod ſi quis forte fortuna quicquam hîc offenderit quod alibi non invenit, idque mihi tribuere velit, pro meo tunc id agnoſcam, metu ne plane pro deſerto habeatur.

MONI-

MONITA
Ad eos qui Geometriam diſcere cupiunt.

Eodem tempore quo legitur propoſitio, conſiderentur & appoſitæ figuræ. Laboris id principio eſt, ſed duobus tribuſve ille diebus ſuperatur.

Non deſerendus eſt labor, ſi occurrant res, quæ non initio ſtatim comprehendantur; Geometria non tam facile quam hiſtoria quædam capitur.

Si poſtquam propoſitionem aliquam cum attentione legens, eam non intelligas, ulterius progredere; intelliges eam fortaſſe in ſequentibus, aut ad minimum tunc, cum omnibus perlectis de novo planè legere incipies.

Numeri qui inter Parentheſes reperiuntur, veluti e.g. (3. 24.) *notant id quod eo loco dicitur alibi probatum eſſe, nempe libro tertio articulo vigeſimo quarto: ita ut prior numerus librum, reliqui articulum ſignificent; eoſque articulos conſulere oportet, ut ſciatur probatio ejus quod legitur.*

Si

Monita.

Si vocabula invenies quæ non intelligas, conſule tabulam quæ in fine ſubjuncta eſt.

Maxime conducet initio Magiſtrum, qui has demonſtrationes explicet, habere, eâ enim ratione multo facilius quam ſi ipſe tantū legeris hæc addiſces.

Si quis laborem non ſubterfugerit in Collegium Claremontanum veniendi, Autorem horum Elementorum ea die Lunæ atque Veneris explicantem offendet.

Sperabam primo quoque tempore reliqua hujus Geometriæ in lucem edere; verùm eorum impreſſionem aliquandiu differe coactus ſum, quo ſpatium haberem alios Mathematicos tractatus multò magis neceſſarios publicandi. Quamprimùm Staticam, Opticam & Quadrantes, in quibus jamjam diſtineor, abſolvo, continuo ſtatim ordine Algebra, Sectiones Conicæ & reliqua quæ promiſi, ut plena quædam & perfecta Geometria fiat, imprimentur.

In-

INDEX
Vocum in hac Geometria explicatarum.

Primus numerus notat librum, & reliqui articulum.

A.

Æquilaterum 2. 7
Æquimultiplex 6. 15
Alternando, invertendo &c. 6.9.8
Amblygonium vel obtuſangulum 2.6
Anguli alterni, interni 1.30
Angulus rectus, obtuſus, acutus 1.17
Anguli externi trianguli 2.10
Anguli oppoſiti, deinceps 1.17
Angulus rectilineus, curvilineus, mixtus 1.6
Angulus ſubtenſus vel oppoſitus 2.17
Arcus 1.11
Area, capacitas vel magnitudo figuræ 9.25

Cir-

INDEX.

C.

Circinus ſ. inſtrumentum proportionum 9.14
Circulus 1.10
Circumferentia ibid.
Commenſurabilis 7.4
Commenſurabilis potentiâ 7.33
Complementum in parallelogrammo 3.12
Complementum anguli 9.30
Congrua figura 2.12
Converſa propoſitio 1.33
Convertendo, componendo &c. 6. 11. 12. &c.
Corpus ſ. ſolidum 1.4
Crura, latera circa angulum rectum trianguli 6.61
Cubicus numerus 7.39

D.

Diagonalis, diameter, linea ducta ex angulo in angulũ in parallelogrammis. 3.7
Diameter 1.12. & 3.7

E.

Ex æquo, proportio 6.13.14

G.

Geometrica progreſſio 8.8
Gnomon 3.12

Gra-

INDEX.

Gradus progreſſionis 8.10
Gradus minuta, ſecunda 1.24

H.

Harmonica progeſſio 8.32
Homologa latera 6.31
Hypothenuſa, maximum latus trianguli rectanguli 6.61

I.

Incommenſurabilis 7.5
Invertendo, alternando &c. 6.8.9&c.
Iſoperimetræ 4.32. in fine
Iſoſceles, triangulum habens duo crura æqualia 2.7

L.

Latera ſive radices numerorum 7.10
Logarithmi 8.26

M.

Magnitudo 6.1
Metiri 7.1
Minuta, gradus 1.24
Multiplicare lineam per aliam lineam, vel per ſuperficiem 6.17.18

N.

Numerus planus 7.9. *ſolidus* 7.37.
Numeri plani ſimiles 7.14.
Nu-

INDEX.

Numerus quadratus 7.12. *cubicus* 7.39

O.

Obliqua, linea 1.17.
Oxygonium vel acutangulum 2.5

P.

Parallela 1.26
Parallelogrammum 3.2
Parallelogramma circa diametrum 3.12
Pars 7.2. *Partes.* 7.3
Perpendicularis 1.15
Planum vel ſuperficies plana 1.5
Poſſe: linea poteſt bis aliam 7.32
Potentia prima 7.22 *ſecunda* 7.35
Problema, Theorema 9.1
Progreſſio Arithmetica 8.2. *Geometrica* 8.8
Harmonica 8.32
Progreſſio quadratorum, cuborum &c. 8.34
Proportio 6.6

Q.

Quadrilaterum, figura quatuor laterum 3.1
Quantitas 1.2
Quadrati-quadratum, ſurſolidus &c. 8.10

R.

R.

Radix vel latus numerorum 7.10
Radius vel ſemidiameter 1.13. *vel ſinus totus* 4.7
Ratio 6.2
Ratio compoſita 6.26
Ratio duplicata 6. 29. 30. *Triplicata* 6.36
Ratio æqualis vel proportio 6.4.6
Ratio major 6.5
Reciproca 4.9
Rectangulum ſimpliciter pro parallelogrammo rectangulo 3.3
Rhombus 3.4
Rhomboides 3.5

S.

Scalenum, triangulum tribus lateribus inæqualibus 2.7. *Conus vel Cylindrus vel parallelopipedum.* 5.12
Secans, tangens, ſinus 4.9
Similia triangula 6.44. *Rectangula* 6.30
Sinus, tangens, ſecans 4.9
Sinus complementi 9.28
Solida 6.54. *Figuræ* 6.48.47.
Solidum corpus 1.4. *Angulus ſolidus* 5.4
Superficies plana vel planum 1.4

Sur-

Surſolidus, quadratus, cubus &c. 8.10

T.

Tangens, ſinus, ſecans 4.9
Termini progreſſionis 8.1
Theoremata, Problemata 9.1
Trapezium quadrilaterum irregulare. 3.2

XVIII

ERRATA.

P. 32. *l.* 23. quot. *p.* 44. *l.* 24. triangula. *p.* 62. *l. ult.* conſtitui. *p.* 65. *l.* 16. *d* 3. *p.* 66. & in 68 Fig. B pro D. *p.* 76. *l.* 12. Accelerationem. *p.* 84. *l.* 10. *b a*. *p.* 96. *l.* 23. dele *eſt*. *p.* 98. *l.* 1. dele *eſt*. *p.* 125. *l.* 23. præcedentem. *p.* 130. *l.* 6. dele *neque eſſe majores*. *p.* 138. *l.* 1. poſt. *p.* 139. *l.* 3. D d. *p.* 147. *l.* 15. c. *p.* 150. *l.* 15. e b. *p.* 177. *l.* 16. 29. *p.* 178. *l.* 10. inſcriptum.

J. J.

 12-32-B-2

J. J.
ELEMENTA GEOMETRIÆ.

LIBER PRIMUS.

De lineis & angulis.

1. PEr nomen *quantitatis* intelligimus rem, quæ comparata ad aliam ejuſdem naturæ, major vel minor, æqualis vel inæqualis appellari poteſt: ut ſunt extenſio, numerus, pondus, tempus, motus; hæc omnia, in quantum ita comparari poſſunt ſecundum plus velminus, ſunt objectum Geometriæ.

2. Nihilominus ſubſiſtimus tantum in conſideratione extenſionis, utpote quæ exemplum & menſura omnium aliarum quantitatum eſſe poteſt.

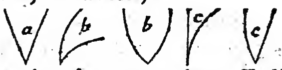
3. Quantitas, quæ extenſionem tantùm habet in longitudinem ſine ulla profunditate, appellatur linea; illa quæ extenſa eſt in longitudinem & la-

latitudinem, dicitur *ſuperficies:* & illa quæ longitudinem,& latitudinem & profunditatem habet, appellatur *corpus* ſive *ſolidum.*

4. *Punctum* eſt initium quantitatis, quod concipitur ac ſi nullam haberet extenſionem, & undiquaque indiviſibile eſſet: ſic extrema, vel medium lineæ, ſunt puncta.

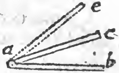
5. Lineæ ſunt vel *rectæ* vel *curvæ:* ſimiliter ſuperficies ſunt vel *planæ*, quæ *plana* dicuntur ſimpliciter: vel *curvæ*, quæ ſunt vel *convexæ*, ut exterior ſuperficies globi, vel *concavæ*, ut interior alicujus fornicis.

6. Quando duæ lineæ ſe mutuo tangunt in uno puncto, & poſtea altera ab altera recedit, oritur inter illas *angulus*, qui *Rectilineus* dicitur, ſi duæ lineæ ſunt rectæ, *a: Curvilineus*, ſi ſunt curvæ, *b: Mixtus*, ſi una eſt curva, altera recta, *c*.



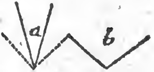
7. Angulus tanto minor eſſe dicitur, quanto magis lineæ, quæ illum conſtituunt, ad ſe invicem inclinatæ ſunt.

ſunt. Sumantur duæ lineæ *a b* & *a c*, quæ ſe mutuo tangant in *a*; ſi concipias, duas illas lineas moveri inſtar compaſſi, ita ut in *a*, tanquam clavo compaſſi, ſemper conjunctæ maneant, licet extremitas



c recedat ab extremitate *b*; tunc obſervabis, quo magis extremitates à ſe mutuo recedent, eo majorem quoque evadere angulum inter illas conſtitutum: & contra, quo magis extrema ad ſe mutuo accedunt, eo magis lineæ ad ſe invicem inclinatæ erunt, & hinc angulus minor erit.

8. Hinc bene notandum, magnitudinem angulorum non æſtimari longitudine linearum, illos conſtituentium, ſed linearum inclinatione. Ex.gr. angulus *b* eſt major angulo *a*, licet lineæ ang. *b* ſint breviores: quoniam non ſunt

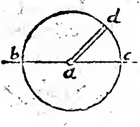


ita inclinatæ ad ſe invicem, ut lineæ ang. *a*: Clarius, imaginare ang. *b* eſſe impoſitum ang. *a*, ceu monſtrant lineæ punctatæ, ang. *b* repræſentantes. Tunc videbis angulum *b* commode

intra ſe continere ang. *a*, lineaſque ang. *a* magis ad ſe invicem inclinatas eſſe, quam lineas ang. *b*, & ſic tandem ang. *a* multo minorem eſſe.

9. Angulus communiter tribus literis deſignatur, quarum media notat punctum contactus linearum, ut in fig. ſeq. *d a c* notat angulum per duas lineas *d a* & *c a* conſtitutum, ita ut *a* ſit punctum commune, quo ſe lineæ mutuo tangunt.

10. Si concipiamus lineam *a d* in extremo *a* affixam medio lineæ *b c*, eamque præterea ſinamus moveri circa punctum *a*; tunc quando illa redierit ad eundem locum, ex quo moveri cœperat, deſcripſit lineam curvam, quæ appellatur *circulus*, vel potius *circumferentia* circuli; nam proprie loquendo, *circulus* eſt omne illud ſpatium, quod circumferentiæ includitur.



11. Pars circumferentiæ appellatur *Arcus*, ut *c d*.

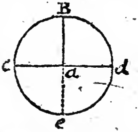
12. Linea *b c* per circumferentiam terminata, appellatur *Diameter*, quæ divi-

dividit circulum in duas partes æquales, quod probare opus non eſt. Imo omnis linea recta ducta per *centrum*, id eſt, punctum *a*, dividet circulum in duas partes æquales, & ipſa etiam erit diameter.

13. Linea *a d* vel *a c* vel quævis alia ducta è centro ad circumferentiam, appellatur *Radius*, vel *ſemidiameter*.

14. Omnes radii ſive ſemidiametri unius circuli ſunt æquales.

15. Quando extremitas *B* æqualiter diſtat à duobus extremis diametri *c* & *d*, id eſt, quando *B* eſt in medio ſemicircumferentiæ; tunc linea *B a* facit duos angulos *B a c* & *B a d*, qui *recti* vocantur, & utrinque ſibi æquales

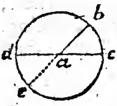


ſunt. Et ſi linea *B a* producta fuerit verſus *e* faciet quatuor angulos rectos, & novam conſtituet diametrum, quæ cum priori circulum dividet in quatuor partes æquales.

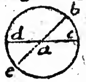
16. Tunc etiam lineæ dicuntur perpendiculares una ad aliam, *B a* ad *d c*, & *d a* ad *B e*.

17. Ve-

17. Verum ſi *b* proximior eſt uni extremo diametri, quam alteri; tunc hæc linea dicitur *obliqua*, & facit utrinque duos angulos inæquales, quorum minor appellatur *acutus*, *b a c*; major vero *obtuſus*, *b a d*.



Et ſi linea *b a* fuerit producta uſque ad *e*, erit illa nova diameter & infra duos novos angulos conſtituet: ita ut in univerſum adſint quatuor anguli, quorum duo, qui ſe tantum in puncto tangunt ut *b a c* & *e a d*, vel *b a d* & *c a e* appellantur *oppoſiti ad verticem*: illi vero, qui habent latus commune dicuntur *anguli deinceps*, ut *d a b* & *b a c*, vel *b a c* & *c a e*.

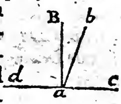


18. Anguli qui arcus æquales habent, etiam ſunt æquales. Ut ſi probetur arcum *c b* eſſe æqualem arcui *e d*, etiam probatum erit angulum *c a b* eſſe æqualem *e a d*.

19. Duo anguli deinceps, ſimul ſumpti, ſemper æquales ſunt duobus rectis. Nam linea *d c* eſt diameter, & cum

cum illa circulum in duas partes æquales ſecet, erunt duo arcus *c b* & *b d*, ſimul ſumpti, æquales ſemicircumferentiæ. Sic etiam duo anguli *c a b* & *b a d* ſimul ſumpti, æquales erunt duobus rectis, quoniam ſemicirculum adimplent, æque ac duo recti.

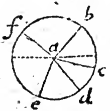
20. Hac ratione hæc propoſitio eſt generalis; cum linea recta ſuper aliam lineam rectam conſiſtit, duos angulos deinceps vel rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Nam ſi lineæ ſunt perpendiculares, ut *B a* ſuper *d a c*, anguli utrinque ſunt recti (15.) Si vero linea eſt obliqua, ut *b a* ſuper eadem *d a c*, tunc anguli quidem ſunt inæquales; ſed quantum obtuſus *b a d* ſuperat rectum *B a d*, tantum etiam acutus *b a c* ſuperatur ab alio recto *B a c*. Et ſic parvitas unius compenſatur magnitudine alterius.



21. Si duo anguli, latus commune habentes, æquales ſunt duobus rectis, reliqua latera efficient lineam

rectam. Sint anguli *d a b* & *b a c*, latus commune *b.a* habentes, æquales duobus rectis, dico lineam *a d* cum linea *a c* conſtituere rectam lineam; (fig. art. 17.) quod manifeſtum eſt per jam dicta. Nam ſi è centro *a* ducatur circulus *d b c*, duo arcus *d b*, *b c* erunt æquales ſemicircumferentiæ; quoniam ſupponitur hos duos angulos æquales eſſe duobus rectis. Et ſic lineæ *d a*, *a c* conſtituent diametrum, & per conſequens erunt *poſitæ in directum.*

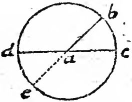
22. Si ex dato puncto *a* erigantur



diverſæ lineæ *a b*, *a c*, *a f*, *a d*, &c. illæ efficient diverſos angulos; & omnes hi anguli ſimul ſumti, vel ſi qui alii circa idem punctum conſtituerentur, erunt æquales quatuor rectis: Nam perſpicuum eſt, omnes hos angulos complere circulum, cujus circumferentiam quoque dividunt in totidem arcus *b f*, *f e*, *e d*, *d c*, *c b*. Et ſic omnes hi arcus ſimul ſumti ſunt æquales quatuor quadrantibus circuli, id eſt, omnes hi anguli ſunt

ſunt æquales quatuor rectis; nam etiam quatuor anguli recti adimplent circulum.

23. Anguli *oppoſiti ad verticem* ſunt interſe æquales. Sint duæ lineæ rectæ *d a c* & *b a e*, dico angulum *b a c* eſſe æqualem angulo *e a d*: nam arcus *c b*, cum arcu *b d* conſtituit ſemicircumferentiam, (12.) & eadem ratione arcus *b d* cum arcu *d e* etiam facit ſemicircumferentiam. Hinc arcus *b c* eſt æqualis arcui *d e*, quia arcus *b d* ſemper facit eandem quantitatem, ſive conjungatur cum arcu *b c*, ſive cum arcu *d e*. Ob eandem rationem angulus *d a b* eſt æqualis angulo *c a e*.

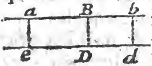


24. Tota circumferentia circuli dividitur in 360. partes æquales, quæ *gradus* appellantur, & quilibet gradus in 60. partes æquales, quæ ſunt *minuta*, & quodlibet minutum in 60. *ſecunda* & ſic in infinitum. Et quando magnitudo angulorum determinanda eſt, numerantur gradus, quos illi comprehendunt. Ex. gr. quando

nominamus angulum 90. grad. tunc intelligimus angulum rectum, quia angulus rectus comprehendit quartam partem circumferentiæ, quæ continet 90. gradus, quia tota circumferentia continet 360, quorum quarta pars eſt 90. Similiter angulus 60. grad. eſt angulus qui facit duas tertias recti.

25. Gradus in ſcribendo notantur cifra, quæ numeris vel imponitur, vel à latere adjungitur. Minuta notantur virgula una ı. Secunda per duas virgulas ıı : Tertia per tres ııı : Quarta per quatuor ıv: &c. ut
o ı ıı
25. 32. 43. id eſt, 25. gradus, 32. minuta, 43. ſecunda.

26. Duæ lineæ dicuntur *Parallelæ*, quando illæ undique æqualiter à ſe invicem diſtant. Duæ lineæ *a b* & *e d* ſunt parallelæ, ſi æqualiter diſtant in *a e* & in *b d*, vel in *B D* & in quovis alio loco.

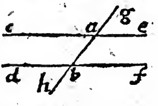


27. Hæc diſtantia menſuratur per perpendicula. Ut ſi quis concipiat ex puncto *a* lineam *a e* perpendiculariter

ter cadere ſuper *e d:* & eodem modo *b d* cadere perpendiculariter ſuper *d e;* ſtatim cognoſcet, quod poſitis illis duobus perpendiculis *a e*, *b d* æqualibus, etiam duæ lineæ *a b* & *e d* æqualiter ab invicem diſtent in his locis; quod natura notum eſt ſine ulteriori probatione.

28. Duæ lineæ parallelæ in infinitum productæ, nunquam concurrunt; nam cum ſemper æqualiter diſtent, ubivis licebit perpendiculares ducere æquales *a e* aut *b d:* & per conſequens nunquam ſe contingunt.

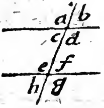
29. Si linea ſecat duas alias lineas parallelas, erit æqualiter inclinata ad utramque: & ſi linea ſecans duas alias, æqualiter ad utramq; inclinata eſt, hæ duæ erunt parallelæ. Sint duæ lineæ parallelæ *c a e*, *d b f*



ſectæ per lineam *g a b h:* dico hanc lineam *g a b h* eſſe inclinatam ad *c a e*, eadem ratione ac ad *d b f:* id eſt, angulum *g a e* eſſe æqualem angulo *g b f.* Hoc natura notum eſſe videtur, ſi modo exigua attentione perpendatur. Nam ſi

ſi angulus *g a e*, ex. gr. major eſſet, & linea *a e* magis remota ab *a g*, tunc punctum *e* lineæ *a e* inclinaret verſus *f*, quia *b f* tantum non recederet quantum *a e*: & ſic duæ lineæ *a e* & *b f* non eſſent parallelæ. Ulterius, ſi concipimus has duas lineas tanquam latera regulæ, poterimus totam regulam conſiderare tanquam lineam indiviſibilem. Sic anguli *h b d* & *c a g* erunt ut *anguli deinceps* æquales duobus rectis (20.) & ang. *h b d* & *g a e* erunt & duo anguli *oppoſiti ad verticem* inter ſe æquales. (23.)

30. Quando linea ſecat duas parallelas, efficit octo angulos, quorum quatuor *a*, *b*: *h*, *g*, ſunt *externi*, reliqui ſunt *interni*. Anguli *c* & *f* vel *d* & *e* appellantur *alterni*: anguli *b* & *f* vel *a* & *e* ſunt *alternative oppoſiti*: anguli *d* & *f*, vel *c* & *e* ſunt *interni ad eaſdem partes* lateris.



31. Anguli alterni & alternative oppoſiti ſunt inter ſe æquales, *b*, *f*; *c*, *h*; & *a*, *e*; *d*, *g*. (29)

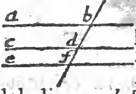
32. Quando linea hac ratione incidit in duas parallelas, efficit angulos internos ad eaſdem partes æquales duobus rectis; Angulus *d* cum ang. *f* eſt æqualis duobus rectis; quia *f* eſt æqualis ang. *c*. (31.) Sed *c* cum *d* facit duos angulos rectos: (20.) E. *f* cum *d* faciet duos angulos rectos, Q. E. D.



33. Propoſitio quædam appellatur *converſa* alterius, quando facta concluſione ex aliquo quod ſuppoſitum erat, poſtea in propoſitione altera converſa id ſupponitur quod concluſum erat, ut exinde colligamus quod ab initio ſupponebatur. Ex. gr. hîc dicimus, ſi lineæ ſunt parallelæ, anguli *d* & *f* ſimul ſumti æquales erunt duobus rectis; ubi ſupponimus lineas eſſe parallelas, & exinde concludimus: E. anguli &c. Converſa ſic fieret. Si anguli *interni ad eaſdem partes* lateris ſunt æquales duobus rectis, lineæ erunt parallelæ: ubi ex ſuppoſito, hos angulos eſſe æquales duobus rectis, concludimus lineas eſſe parallelas.

34. Con-

34. Converſæ h.l. ſunt veræ, nim. ſi linea duas alias lineas ſecans angulos alternos &c. æquales facit, hæ duæ lineæ ſunt parallelæ.



35. Si duæ lineæ ſunt parallelæ uni tertiæ, inter ſe erunt parallelæ. Sit linea *a b* parallela lineæ *c d*, & *e f* ſit etiam parallela *c d*, dico *a b* eſſe parallelam *e f*: nam ſi ducatur linea *b d f* omnes tres ſecans, angulus *b* erit æqualis ang. *d* (31.) & eodem modo angulus *f*, erit æqualis angulo *d*: (31.) E. angulus *b* eſt æqualis ang. *f*, quia axioma eſt, ſi duo ſunt æqualia eidem tertio, inter ſe ſunt æqualia. Quoniam igitur angulus *b* eſt æqualis ang. *f*, ſequitur lineam *a b* eſſe parallelam lineæ *e f*. (34)

LIBER

LIBER SECUNDUS.

De Triangulis.

1. F*Igura* eſt ſpatium undique circumſcriptum. Si lineæ illam terminantes ſunt rectæ, appellatur figura *rectilinea*: ſi curvæ ſunt, appellatur *curvilinea*; & ſi partim rectæ partim curvæ, vocatur *mixta*.

2. Figuræ ſunt vel *planæ*, quæ ſunt in ſuperficie plana, vel *ſolidæ*, quæ ſunt corpus cum tribus dimenſionibus. Hic agimus tantum de figuris planis.

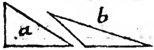
3. Omnes lineæ, quæ figuram circumſcribunt, ſimul ſumtæ, conſtituunt *circumferentiam*, vel *Perimetrum*, vel *circuitum* figuræ.

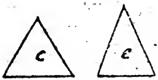
4. Ex omnibus figuris planis curvilineis vel mixtis, circulus tantum conſideratur, vel pars circuli terminata arcu & una vel pluribus lineis rectis.

5. Inter figuras rectilineas ſimpliciſſima eſt *Triangulum*, quod terminatur tribus lineis, tres angulos conſtituentibus.

6. Tri-

6. Triangulum, habens angulum rectum, appellatur *Triangulū rectangulum, a*: habens angulum obtuſum, appellatur *obtuſangulum* vel *Amblygonium*; *b*: habens tres angulos acutos, dicitur *acutangulum* vel *Oxygonium c, e*.

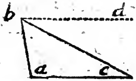




7. Quando triangulum omnia latera habet inæqualia, appellatur *Scalenum a, b*: Si duo latera ſunt æqualia, eſt *Iſoſceles, e*: ſi omnia latera ſunt æqualia, eſt *æquilaterum, e*.

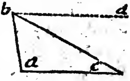
8. Si duo ſaltem latera trianguli ſumuntur, appellari poſſunt *crura*, & tertium tunc appellabitur *baſis*. Omne latus poteſt ſumi pro baſe.

9. In omni triangulo tres anguli ſimul ſumti ſunt æquales duobus rectis. Sit triangulum *a b c*, dico angulum *a*, una cum angulo *c*, & ang. *a b c* reſpondere duobus rectis: nam ſi concipiamus lineam *b d* eſſe parallelam lineæ *a c*, hæ



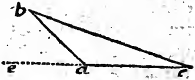
duæ

duæ lineæ parallelæ ſecantur per tertiam *b c*, & per conſequens anguli alterni erunt æquales, id eſt, angulus *c* eſt æqualis ang. *c b d* (1. 31.) Ulterius, linea *b a* incidens in lineas parallelas *b d* & *a c*, facit angulos internos ad eaſdem partes lateris æquales duobus rectis (1. 32.) id eſt, angulus *a b d*, una cum angulo *a* eſt æqualis duobus rectis. Sed angulus *a b d* eſt



compoſitus ex duobus angulis, quorum alter eſt *a b c* (unus ex numero trium angulorum ipſius trianguli,) alter *d b c*, quem æqualem eſſe diximus ang. *c*. E. m. tres anguli, nim. *a b c*, una cum *c* & *a* duobus rectis æquales erunt; Q. E. D.

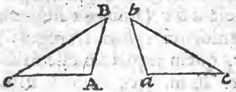
10. Producta baſi cujuſcunque trianguli, angulus externus eſt æqualis duobus internis oppoſitis. Sit triangulum *a b c*, & producatur latus *c a* ad *e*, habebis angulum



b a e, qui appellatur angulus *externus* trianguli. Jam dico angulum hunc

hunc externum *b a e* eſſe æqualem duobus angulis *b* & *c*, qui ſunt *interni oppoſiti;* nam hi duo anguli *b* & *c* cum tertio *b a c* ſimul ſumti faciunt duos rectos, (per præced.) & ſimiliter hic tertius angulus *b a c* cum angulo *b a e* facit etiam duos rectos: (1:20.) E. anguli *b* & *c* ſimul ſumti tantum faciunt, quantum angulus *b a e*; Q. E. D.

11. Si triangulum A B C habeat duo latera A B & A C æqualia duobus lateribus *a b* & *a c* alterius trianguli; & ſi prætereà angulus A ſit æqualis angulo *a*: dico tertium latus B C etiam eſſe æquale *b c*, & angulum B angulo *b*, & C angulo *c*, & totum triangulum A B C toti triangulo *a b c*.

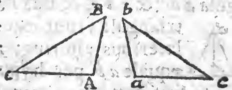


Nam ſi concipiamus triangulum *a b c* eſſe ſuperimpoſitum triangulo A B C, ita ut latus *a b* exactè reſpondeat A B, quod illi æquale eſt, tunc etiam latus *a c* cadet ſuper A C, quia ſupponitur angulum *a* eſſe æqualem angulo A; & ſic punctum *c* cadet ſuper C, quia

quia *ac* eſt æquale A C: E. m. *bc* cadet ſuper B C, & per conſequens ipſi erit æquale; ſimiliter angulus *c* erit æqualis angulo C, & angulus *b* angulo B, & totum triangulum toti triangulo, quoniam omnia ita ſibi congruunt, ut triangulum ſuperimpoſitum, neque excedat alterum, neque ab eo excedatur.

12. Figuræ, quæ ſibi exactè reſpondent, ſi una ſuperpoſita fuerit alteri, dicuntur figuræ *congruæ, quæ mutuo ſibi congruunt:* & hoc eſt axioma generale, *quæ mutuo ſibi congruunt, æqualia ſunt.*

13. Etiam converſa præcedentis propoſitionis vera eſt; nimirum, ſi triangulum habet tria latera æqualia tribus lateribus alterius trianguli, omnes anguli unius etiam æquales erunt angulis alterius, & area ſeu ſpatium unius trianguli erit quoque æquale areæ alterius: Ut ſi A B eſt æquale, *ab*, & A C, *ac*, & B C, *bc*: dico angulum

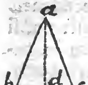


A

A eſſe æqualem angulo *a*, & B angulo *b*, & C angulo *c*, totumque triangulum A B C toti triangulo *a b c*; quod non indiget probatione.

14. Si angulus A eſt æqualis ang. *a*, & angulus B ang. *b*, & latus A B lateri *a b*; erit etiam latus A C æquale lateri *a c*, & B C lat. *b c*, & totum triangulum A B C toti triangulo *a b c*; quod facile probari poteſt per præcedentes.

15. In omni triangulo Iſoſcele duo anguli, quos crura æqualia ad baſin conſtituunt, ſunt inter ſe æquales. Sit triangulum *a b c*, cujus crus *a b* ſit æquale *a c*,



dico angulum *b* eſſe æqualem angulo *c*: nam ſi concipiamus baſin *b c* eſſe diviſam æqualiter in *d*, linea *a d* efficiet duo triangula *a d c* & *a d b*, & tria latera unius

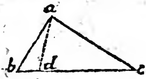


trianguli erunt æqualia tribus lateribus alterius; nam *a c* eſt æquale *a b* per hypotheſin vel ſuppoſitionem ipſius propoſitionis; & *d c* eſt æquale *d b*, quia hic ſupponimus baſin *b c* eſſe æqualiter diviſam in *d*. Tertium latus *a d* eſt commune utri-

utrique triangulo: ſic tria latera unius ſunt æqualia tribus lateribus alterius, & per conſequens totum triangulum *a d c* eſt æquale toti triangulo *a d b*, & angulus *c* ang. *b*; (2. 13.) Q. E. D.

16. In omni triangulo Iſoſcele, ſi linea cadens ex angulo verticis dividat baſin bifariam, id eſt, in duas partes æquales, tunc ad eandem baſin perpendicularis eſt, ac angulum quoque verticis bifariàm ſecat: nam angulus *a d c* eſt æqualis ang. *a d b* per præcedentem: & per conſequens uterque rectus eſt, & linea *a d* perpendicularis ad *b c* (1. 15.) Similiter angulus *d a c* eſt æqualis angulo *d a b*, per præcedentem.

17. Omnis trianguli majus latus majorem angulum *ſubtendit*; id eſt, majori angulo oppoſitum eſt. Sit latus *b c* majus latere *a c*, dico angulum *a* ſubtenſum à latere *b c* eſſe majorem angulo *b*, qui ſubtenditur à latere *a c*: nam cum *b c* ſit majus *c a*, concipe *c d* eſſe æquale *c a*, ita ut *a d c* ſit tri-



BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

triangulum Iſoſceles: Ergo (2. 15.) angulus *c a d* erit æqualis angulo *c d a.* Sed angulus *c a b* eſt major angulo *c a d, totum enim eſt majus ſua parte.* Ergo angulus *c a b* eſt major angulo *c d a.* Ulterius, cum angulus *c d a* ſit externus reſpectu minoris trianguli *d a b,* major erit ſolo interno *b:* (2. 10.) Ergo multo magis, angulus *c a b* erit major angulo *b.* Q. E. D.

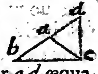
18. Omne triangulum neceſſario habere debet duos angulos acutos: nam ſi tantum unum haberet, reliqui duo eſſent vel obtuſi, vel recti, vel unus obtuſus & alter rectus. Sed nullum horum eſſe poteſt, cum (2. 9.) omnes anguli ſimul ſumti duos tantum rectos faciant.

19. Omnium linearum, quæ duci poſſunt à puncto dato ad lineam datam, breviſſima eſt perpendicularis, & illæ ſunt longiores, quæ magis recedunt à perpendiculari. Sit data linea *a d,* & punctum datum *b;* ſit præterea *b a* perpendicularis ad *d a,* à qua *b e* ma-



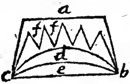
magis remota quam *b c*: dico *b a* eſſe breviſſimam omnium linearum poſſibilium, ex. gr. *b c*: & præterea, *b e* eſſe longiorem *b c*: Nam in triangulo *a b c* angulus *a* eſt rectus, & per conſequens maximus omnium, quia reliqui duo neceſſario eſſe debent acuti: (2. 18.) Ergo latus *b c* eſt majus latere *b a*. (2.17.) tanquam ſubtenſum majori angulo. Similiter in triangulo *b c e* angulus *b c e* eſt obtuſus, quia angulus *b c a* eſt acutus, & per conſequens latus *b e* erit majus latere *b c* (2. 17.) tanquam ſubtendens majorem angulum.

20. In omni triangulo duo latera ſimul ſumta majora ſunt tertio. Sit triangulum *a b c*, dico latus *a b*, una cum *a c*, eſſe majus ſolo *c b*: Nam ſit producta *b a*, & concipiatur *a d* æquale *a c*, erit triangulum *a d c* Iſoſceles, & per conſequens angulus *a c d* erit æqualis angulo *d*: (2. 15.) Ergo angulus *d c b*, qui major eſt ang. *d c a*, etiam major erit ang. *d*: Jam ſi conciperes *b d c* tanquam unum triangulum, latus *b d* erit majus latere *c b*, (2. 17.) tanquam



quam ſubtenſum angulo majori. Sed *b d* eſt æquale duobus lateribus *b a*, *a c*, quia *a d* eſt æquale *a c*: Ergo duo latera *b a*, *a c* ſunt majora *b c*; Q.E.D.

21. Etſi hæc propoſitio demonſtrata ſit, nihilominus pro principio natura noto admitti poteſt. Nam linea *c b*, cum ſit recta, facit viam breviſſimam



à puncto *c* ad punctum *b*, dum interim reliquæ *c a b*, vel etiam *c d b* vel *c e b* circuitum faciunt, & per conſequens longiorem viam abſolvunt. Similiter illud cum Archimede pro principio ponere poſſumus, illarum linearum, quæ tales circuitus faciunt, iſtas eſſe longiores, quæ ſuo ambitu alias circumſcribunt vel includunt, & ſic *c d b* eſſe longiorem *c e b*, & *c a b* longiorem *c d b*; quod tamen intelligendum non eſt de illo caſu, ubi lineæ efficiunt figuram dentatam, ut in hac figura, ubi lineæ *c f f b* longiores eſſe poſſunt *c a b*, non obſtante quod circumſcribantur circuitu *c a b*.

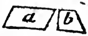
LIBER

LIBER TERTIUS.

De Quadrilateris, & Polygonis.

1. FIguræ terminatæ quatuor lineis rectis quatuor angulos efficientibus, appellantur *quadrilatera*.

2. Quando lineæ oppoſitæ ſunt parallelæ, quadrilaterum appellatur *parallelogrammū*, *a;* ſi non, appellatur ſimpliciter *Trapezium*, *b*.



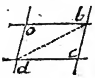
3. Si parallelogrammum omnes quatuor angulos rectos habuerit, dicitur *parallelogrammū Rectangulum c*, vel brevitatis gratia, *Rectangulum:* & ſi præter hæc etiam omnia latera ſunt æqualia, dicitur *quadratum*, *d*.



4. Si omnia latera æqualia quidem ſunt, anguli vero non, tunc parallelogrammum dicitur *Rhombus*.

5. Si parallelogrammum neque angulos neque latera æqualia habet, dicitur *Rhomboides*, *a*.

6. In omni parallelogrammo anguli oppoſiti ſunt æquales. Sit parallelogrammum *o b c d*, dico angulum *o* eſſe æqualem angulo *c*: nam angulus *o* eſt æqualis angulo exteriori *b* (1.31.) & *b* eſt æqualis *c*: (1.31.) ergo etiam *o* eſt æqualis *c*.



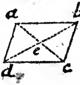
7. Linea ducta ex angulo ad angulum oppoſitum, dicitur *Diagonalis* vel *Diameter*, ut *b d*.

8. Omne parallelogrammum dividitur bifariam, id eſt, in duas partes æquales, per diagonalem. Diagonalis *b d* dividit parallelogrammum *o b c d* in duo triangula *o b d* & *b c d*. Probandum igitur erit hæc duo triangula eſſe æqualia. 1. angulus *o* eſt æqualis angulo *c*. (3. 6.) 2. angulus *o b d* eſt æqualis ang. *c d b*: (1. 31.) & ob eandem rationem etiam angulus *o d b* eſt æqualis ang. *c b d*. Habent igitur hæc duo triangula omnes angulos reciproce æquales; & præterea, latus *b d* eſt commune utrique triangulo: E. etiam totum triangulum *o b d* eſt æquale toti triangulo *c d b* (2.14.)

9. In omni parallelogrammo latera

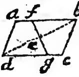
ra oppoſita ſunt æqualia inter ſe, quoniam totum triangulum *o b d* eſt æquale toti triangulo *d c b* per præcedentem: E. etiam latus *c d* erit æquale lateri *b o* & latus *o d* lateri *b c*; Q. E. D.

10. Duæ diagonales *a c* & *b d* ſecant ſe mutuo in medio *e*: nam in triangulis *a e d* & *b e c*, latus *a d* eſt æquale lateri *c b* (3. 9.) angulus *e a d* eſt æqualis ang. *e c b*, (1. 31.)



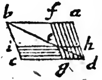
ob eandem rationem angulus *a d e* eſt æqualis ang. *c b e*; (1. 31.) & ulterius angulus *a e d* eſt æqualis ang. *c e b*, (1.23.) quia ipſi ad verticem oppoſitus. E. latus *d e* eſt æquale lateri *b e* & latus *a e* lateri *c e*. (2. 14.) Sic igitur duæ diagonales ſunt diviſæ æqualiter in *e*.

11. Omnis linea recta *f g*, tranſiens per medium diagonalis *e* dividit parallelogrammum in duas æquales partes. Probandum eſt, trapezium, id eſt, quadrilaterum irregulare, *a f g d a* eſſe æquale trapezio, *c g f b c*. 1. triangulum *b e f* eſt æquale



triangulo *d e g*: nam latus *d e* eſt æquale *e b* per hypotheſin; angulus *f* eſt æqualis angulo *g*; (1.31.) angulus in *e* utrinque eſt æqualis, quia eſt oppoſitus ad verticem &c. E. triangulum *f e b* eſt æquale triangulo *g e d*. (2. 14.) 2. totum triangulum *a d b* eſt æquale toti *c b d*. (3. 8.) Ergo ſi de triangulo *a d b* auferatur parvum triangulum *f e b* & per compenſationem ei iterum addatur triangulum *d e g*, reſultabit trapezium *a f g d* æquale triangulo *a d b*, medietati ſ. ſemiſſi totius parallelogrammi. Q. E. D.

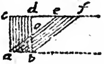
12. Si in diagonali *b d* ſumatur punctum *e*, perque illud tranſeant duæ lineæ lateribus parallelæ, nim. *g e f* & *h e i*; reſultabunt quatuor parallelogramma, nim. *e f b i*, *e h d g*; (& hæc duo appellantur *parallelogramma circa diametrum*) & reliqua duo parallelogramma *e h a f*, & *e i c g*, quæ appellantur *complementa*: duo verò complementa cum uno parallelogrammo circa diametrum efficiunt figuram, quæ vocatur *gnomon*, quale hic eſt ſpatium lineis notatum.



13.

13. In omni parallelogrammo *complementa* ſunt æqualia. Probandum erit *e h a f* eſſe æquale *e g c i*. Totum triangulum *b a d* eſt æquale toti triangulo *b d c* (3.8.) Similiter triangulum *e f b* eſt æquale triangulo *e b i*, (3.8.)& etiam *e h d* eſt æquale *e g d*: (3.8.)Ergo ſi ab æqualibus triangulis *b d a*, & *b d c*, auferantur æqualia, nimirum ſi auferantur ab una parte *e f b*, & *e h d*, & ex altera parte *e i b*, & *e d g* reſtabit ab una parte parallelogrammum *e h a f* æquale parallelogrammo *e i c g*, quod reſtat ab altera parte; Q. E. D.

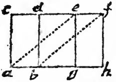
14. Parallelogramma quæ ſunt ſuper eadem baſi, & in iiſdem parallelis, ſunt inter ſe æqualia. Sit parallelogrammum *a b d c*, & aliud *a b f e*, ita ut baſis *a b* ſit communis utrique, & linea *c d* producta tranſeat per *e f*; ſimulque hac ratione duo parallelogramma inter duas parallelas conſtituantur, nimirum inter lineam *a b* & lineam *c f*, parallelam lineæ *a b*: Dico parallelogrammum *a b d c* eſſe æquale *a b f e*. 1. *c d* eſt æqualis *e f*, quia tàm hæc quàm illa æquales ſunt li-



 neæ

neæ *a b*: (3.9.) Ergò ſi hiſce duabus lineis æqualibus addamus lineam *d e*; erit *c e* æqualis *d f*. 2. *c a* eſt æqualis *d b* (3.9.) 3. angulus *a c e* eſt æqualis angulo *b d f*: (1. 31.) Ergo totum triangulum *a e c* eſt æquale toti *b f d*. Si jam de quovis horum triangulorum æqualium auferatur triangulum album *d e o*, quod eſt inter duo parallelogramma, & cuivis illorum etiam addatur triangulum lineis contrariis notatum *o a b*; reſultabit ex hiſce ab una parte parallelogrammum *a b d c* æquale parallelogrammo *a e f b*, ab altera parte conſtituto.

15. Parallelogramma, quæ ſunt in eiſdem parallelis *a h* & *c f* & ſuper æqualibus baſibus, alterum ſuper *a b*, & alterum ſuper *g h*, ita ut *a b* æqualis ſit *g h*, ſunt æqualia. Nam ſi quis concipiat tertium parallelogrammum *a e f b*, hoc æquale erit *a b d c*, (3. 14.) quoniam eſt ſuper eadem baſi *a b*, & in iiſdem parallelis *a b* & *c f*: Et idem hoc parallelogrammum *a e f b* etiam eſt æquale *g h f e*, quia utrumque habet



ean-

eandem baſim, nim. *e f* (nihil enim refert ſive baſis ſit in inferiori lineâ ſ. in ſuperiori) & ſunt in iiſd. parallelis, nim. *f e*, & *b a*. Ergo etiam *h f e g* eſt æquale *a b d c*, quia ſunt æqualia uni tertio *a e f b*.

16. Triangula ſuper eadem baſi *a b* & inter eaſdem parallelas *a b* & *c e* conſtituta ſunt æqualia. Triangulum *a b c* eſt æquale triangulo *a e b*, quia ſi quis concipiat lineam *b d* parallelam *a c* & aliam *b f* parallelam *a e*, reſultabunt duo parallelogramma *a c d b*, & *a e f b*, quæ cum ſint ſuper eadem baſi *a b* & in eiſdem parallelis, erunt æqualia. (3.14.) Sed triangulum *a c b* eſt dimidium parallelogrammi *a c d b*, & triangulum *a e b* eſt dimidum parallelogrammi *a e f b*: (3. 8.) Ergo hæc duo triangula inter ſe ſunt æqualia.



17. Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta & in iiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. Demonſtratio eſt facilis.

18. Si triangulum cum parallelogrammo eandem baſin habuerit, in

eiſdemque fuerit parallelis, dimidium erit parallelogrammi. Triangulum *a b e* eſt dimidium parallelogrammi *a e f b*.

19. *Pentagonum* eſt figura quinque laterum & quinque angulorum. Si omnia latera ſunt æqualia, & omnes anguli æquales, pentagonum eſt *regulare*.

20. *Hexagonum* eſt figura ſex laterum & totidem angulorum; *Heptagonum* ſeptem; *Octogonum* octo &c. quæ quoque regularia ſunt, ſi omnes anguli & latera omnia inter ſe æqualia ſunt.

21. *Polygonum* in genere omnis dicitur figura, quæ pluribus comprehenſa lateribus, plures efficit angulos: ſed vocabulum hoc raro adhibetur, niſi figuræ pluribus quam quatuor aut quinque lateribus conſtent.

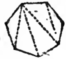
22. Omne polygonum dividi poteſt in tot triangula, quot habet latera. Si intra figuram ſumatur punctum *a*, ubicunque id fuerit, & ex eo concipiantur ductæ lineæ verſus quemcunque angulum *a b*, *a c*, *a d*, &c. tot erunt triangula, quot fuerint latera polygoni.

23. Anguli polygoni omnes ſimul ſumti conficiunt bis tot rectos demtis quatuor, quot ſunt latera polygoni. E. gr. ſi polygonum habet ſeptem latera, quorum duplum eſt 14. ab iiſque auferantur quatuor, reſtant decem: dico omnes angulos hujus heptagoni, nimirum angulum *c b h* una cum *b h g* & *h g f* &c. ſimul



ſumtos eſſe æquales his decem angulis rectis. Nam ſi ex puncto *a* ducantur ad angulos ſeptem lineæ *a b*, *a c*, *a d* &c. ad conſtituenda ſeptem triangula, quodlibet horum triangulorum habebit tres angulos duobus rectis æquales: (2.9.) ita ut omnes anguli ſimul ſumti in ſeptem triangulis æquales ſint 14. rectis. Sed quodlibet horum triangulorum unum habet angulum circa verticem in puncto *a*; ita ut ſi omnes ponerentur circa hoc punctum, totum circuitum implerent. Ergo hi ſeptem anguli coeuntes ad punctum *a* æquales ſunt quatuor rectis, (1. 22.) & per conſequens omnes reliqui anguli, qui conficiuntur ab ipſis lateri-

bus heptagoni, æquales ſunt decem rectis; Q. E. D.



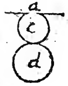
24. Polygonum etiam reſolvi poteſt in triangula, ducendo lineas ab angulo ad angulum; ſed tunc numerus laterum excedet numerum triangulorum duobus.

LIBER

LIBER QUARTUS.

De Circulo.

1. LInea circulum *tangere* dicitur, quæ cum circulum tangat, non tamen eum ſecet, licet producatur ultra punctum contactus. Linea *a* tangit circulum *c* prout etiam circulus *c* tangit circulum *d*: ſed in *b* linea circulum tranſit eumque ſecat.



2. Linea tranſiens per circulum, eum ſecat in duas partes, quæ appellantur *ſegmenta*, *e* eſt ſegmentum *minus*, & *f majus*; hæc linea ſecans dicitur *chorda* & partes circuli ſectæ *arcus*. Chordæ cum arcu conſtituit in duobus extremis duos angulos mixtos, qui appellantur *anguli ſegmenti*, ut *e b f*.



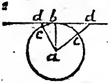
3. Si in arcu ſegmenti *a c b* ſumatur punctum *c* ubicunque id fuerit, & concipiantur duæ lineæ *c a*, *c b*; illæ conſtituent ang. *a c b*, qui vocatur *angulus in ſegmento*: & hic ang. *a c b* *inſiſtere* dicitur arcui alterius ſegmenti inferioris.



4. *Sector* circuli eſt triangulum mixtum, duabus ſemidiametris *a b*, *a c*, & arcu circuli *b c*, comprehenſum. Sector hîc notatus eſt lineolis.

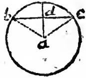


5. Si ad extremitatem ſemidiametri *a b*, concipiatur perpendicularis *b d*, illa tanget circulum in unico puncto *b*; & quodvis aliud punctum lineæ *b d* erit extra circulum ſitum. Ex. gr. punctum *d* eſt extra circulum; nam ſi concipiatur linea *a d* ducta ex centro, quæ ſecet circulum in puncto *c*, erit illa *a d* major *a b*, (2. 19.) & per conſequens major quàm *a c*; quia *a c* eſt æqualis *a b*: (1. 14) E. punctum *d* cadit extra circulum. Q. E. D.

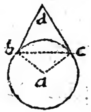


6. Chorda quædam *b c* dividitur bi-

biſariam per perpendicularem *a d*, per centrum *a* ductam; nam triangulum *a b c* eſt Iſoſceles quoniam *a b* eſt æquale *a c*: (1. 14.) E. perpendicularis *a d* ſecat baſin *b c* in duas partes æquales. (2. 16.) Et arcus quoque *b c* eſt diviſus biſariam.

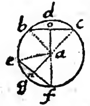


7. Si duæ lineæ *d b* & *d c* tangant circulum, erunt æquales. Nam concipiantur à centro ad puncta contactus lineæ ductæ *a b* & *a c*, erunt hæ perpendiculares ad tangentes. (4. 5.) Ulterius, ſi concipiatur linea *b c*, angulus *a b c* erit æqualis ang. *a c b*: (2. 15.) E. ſi ab æqualibus, i. e. angulis rectis *a b d* & *a c d*, auferantur æqualia, i. e. angulus *a b c* ab una parte, & ang. *a c b* ab altera, erunt reliqui anguli æquales, i. e. *c b d* erit æqualis *b c d*, & per conſequens latus *d b* erit æquale lateri *d c* (2. 15.)

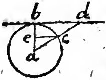


8. Duæ

8. Duæ chordæ æquales *b c*, *e f* conſtituunt duo ſegmenta *b d c* & *e g f* æqualia, & lineæ quoque perpendiculares *a o* & *a n* æquales erunt. Quod facile probari poteſt.



9. Sit ſemidiameter *a b*, perpendicularis *b d* & alia linea *a c d* ſecans circulum in *c* & perpendicularem in *d*, nec non linea *c e* perpendicularis ad radium *a b*: omnes hæ lineæ gaudent certis nominibus. Linea *b d* terminata per *a d*, appellatur *tangens* arcus *b c*, ex. gr. 30°; linea *a d* vocatur ſecans ejuſdem arcus 30°: linea *c e* dicitur *ſinus* ejuſdem arcus: & tandem *a b*, appellatur *ſinus totus*, vel ſimpliciter radius.

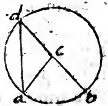


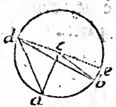
10. Si in circumferentia circuli duo ſumantur puncta *a* & *b* atque ab illis lineæ ducantur ad centrum *c*, & aliæ duæ ad aliud punctum *d* in circumferentia, duo conſti-



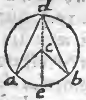
ſtituentur anguli, quorum alter *a c b* vocatur *angulus ad centrum*, alter *a d b angulus ad circumferentiam*.

11. Angulus ad centrum *a c b* ſemper duplex eſt anguli ad circumferentiam *a d b*. 1. Si una linearum, ut *b d*, tranſeat per centrum *c*, angulus *a c b* erit externus reſpectu trianguli *a c d* (2. 10.) & per conſequens erit æqualis duobus angulis internis oppoſitis, nim. angulo *a d c* & ang. *d a c*: (2. 10.) Sed hi duo anguli *a d c* & *d a c* inter ſe ſunt æquales. (2. 15.) quia duo crura *c a* & *c d* ſunt æqualia: (1. 14.) Ergo angulus *a c b* eſt duplex unius horum duorum, nim. *a d c*; Q. E. D. 2. Si linea quædam *a d* vel *b d* non tranſeat per centrum *c*; concipiatur *d c e*, ita ut *e* ſit extra arcum *a b*: Tunc totus angulus *a c e* erit duplex anguli *a d e*, per caſum primum hujus propoſitionis; & ſimiliter angulus *b c e* erit duplex anguli *b d e*:





Ergo ſi de angulo *a c e* auferatur *b c e* & de angulo *a d e*, (qui eſt ſemiſſis anguli *a c e*) auferatur *b d e*, (qui etiam eſt ſemiſſis anguli *b c e*) erit reſiduum *a d b* dimidium *a c b*: quia axioma eſt, ſi quantitas eſt dupla alterius & auferatur à majori duplum illius quod aufertur à minori, quod reſiduum eſt in majori erit etiam duplum reſidui in minore: vel ſi totum totius eſt duplum, & ablatum ablati, erit & reliquum reliqui duplum. 3. Si punctum *e* cadit intra arcum *a b*, tunc angulus *a c e* erit duplex anguli *a d e* & angulus *b c e* erit etiam duplex ang. *b d e*, quod jam in primo caſu hujus propoſitionis demonſtratum erat, ergo angulus totus *a c b* eſt duplex ang. *a d b*.



12. Omnes anguli qui inſiſtunt eidem arcui *a b* ſunt inter ſe æquales, in quocunque loco circumferentiæ etiam fuerit illorum punctum verticale. Angulus *a e b* eſt æqualis angulo *a d b*, quia

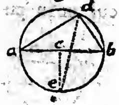


quia uterque eſt ſemiſſis anguli *a c b*, qui eſt ad centrum *c*. (4. 11.)

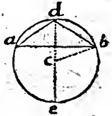
13. Angulus ad centrum *a c e*, inſiſtens medietati arcus *a b*, cui inſiſtit alius angulus ad circumferentiam *a d b* eſt æqualis eidem angulo ad circumferentiam (4. 11.)



14. Angulus *a d b*, qui inſiſtit ſemicircumferentiæ, eſt rectus; nam ſi *e* dividat bifariam ſemicircumferentiam *a e b*, angulus *a c e* erit æqualis ang. *a d b* per præcedentem. Sed *a c e* eſt rectus: (1. 15.) E. etiam *a d b* eſt rectus.

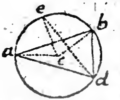


15. Angulus *a d b* in minori ſegmento eſt obtuſus, quia cum arcus *a e b* ſit major ſemicircumferentia, erit etiam arcus *b e*, qui eſt ſemiſſis arcus *a e b*, major 90°. Et angulus *a d b* qui eſt æqualis angulo *b c e*, (4. 13.) erit major 90°; id eſt, erit obtuſus.

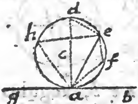


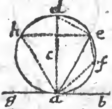
16.

16. Angulus *a d b* in majori ſegmento eſt acutus: nam eſt æqualis angulo *a c e*. Sed cum arcus *a e b* ſit minor ſemicircumferentia, arcus *a e* qui eſt ſemiſſis *a e b*, erit minor 90. grad.



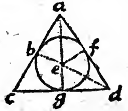
17. Si recta linea *g a b* tangat circulum in puncto *a* & alia linea *a e* ſecuerit eundem circulum, angulus *b a e* erit æqualis angulo in ſegmento oppoſito *a h e*: Et angulus *e a g* erit æqualis angulo in altero ſegmento *a f e*: Nam concipiatur perpendicularis *a d*, quæ tranſibit per centrum *c*, (4. 5.) angulus *a e d* erit rectus: (4. 14.) & per conſequens, quia tres anguli unius trianguli ſunt æquales duobus rectis, (2. 9.) angulus *e a d* una cum angulo *a d e* conſtituet unum rectum. Sed idem *e a d* cum *e a b* etiam efficiunt rectum, quia *a d* eſt perpendicularis ad *a b*: E. angulus *e a b* eſt æqualis *a d e*, &.





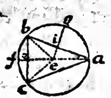
& per conſequens omni angulo, qui inſiſtit eidem arcui *a e* & punctum quodvis habet in circumferentia, ut ang. *e b a*, quia omnes hi anguli inter ſe ſunt æquales; (4. 12.) Et hæc eſt prima pars hujus propoſitionis. Nunc probandum eſt angulum *e a g* eſſe æqualem ang. *a f e*; quæ eſt altera pars. In triangulo *a e f*, angulus *a f e* unà cum *f a e* & *f e a* eſt æqualis duobus rectis, (2. 9.) Sed angulus *f e a* eſt æqualis *f a b*, per jam demonſtrata in parte prima hujus propoſitionis, nam linea *f a* conſiderari poteſt ut ſecans circulum & tangentem *b a*, in quo caſu angulus *f a b* debet eſſe æqualis omni angulo, qui fieri poteſt in ſegmento oppoſito *f d h a*. Sed angulus *f e a* eſt in hoc ſegmento, quia inſiſtit arcui *f a* & ejus punctum *e* incidit in punctum quoddam circumferentiæ *f e d h a*, ut ita angulus *f e a* æqualis ſit ang. *f a b*. Porrò duo anguli *e a f*, & *f a b* unà cum *a f e* ſunt æquales duobus rectis. Sed iidem *e a f*, & *f a b* unà cum *e a g* ſunt etiam æquales duobus rectis: (1. 20.) Ergo angulus *e a g* eſt æqualis ang. *e f a*; Q.E.D. 18.

18. Figura rectilinea *circa circulum deſcribi* dicitur, cum ſingula latera ejus circuli peripheriam tangunt. Triangulum *a c d* circa circulum *b g f* deſcriptum eſt, quia quodlibet latus hujus trianguli tangit circulum in *b*, in *g*, in *f*.



19. Figura in *circulo inſcribi* dicitur, cum ſinguli ejus anguli tetigerint circumferentiam, ut triangulum *a b c* in figura ſequente.

20. Omne triangulum *a b c* inſcribi poteſt circulo: nam ſi quis concipiat duas lineas *e i* & *e o*, quæ latera *a b* & *b c* perpendiculariter, & in medio ſecent, tunc ex puncto *e* tanquam centro duci poſſit circulus per punctum *b*. Sed dico hunc circulum quoq; tranſiturum per puncta *a* & *c*: nam 1. duo triangula *e i b* & *e i a* erunt æqualia, quia latus *i b* eſt æquale lateri *i a* per hypotheſin, latus *e i* eſt commune, & angulus ad *i* eſt utrinque rectus: Ergo (2. 11.) la-

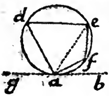


latus *e b* eſt æquale lateri *e a*. 2. Ob eandem rationem probari poteſt latus *e c* eſſe æquale *e b*. Et per conſequens circulus, cujus centrum erit *e*, & ſemidiameter *e b*, tranſibit per *a* & *c*.

21. Triangulum *a c d* (fig. art. 18.) poteſt deſcribi circa circulum. Nam ſi concipiantur duæ lineæ *a e* & *d e* qui dividant bifariàm angulum *a* & *d*; Et poſtea quoque lineæ perpendiculares ad latera trianguli nim. *e b*, *e f*, *e g*, dico, ſi quis circulum ducat ex centro *e* per *b*, hunc circulum tangere tria latera trianguli in punctis *b*, *f*, *g*. Nam 1. duo triangula *a e b*, *a e f* ſunt æqualia: Habent enim latus *a e* commune, angulum ad *b* & *f* rectum, & alium angulum ad *a* æqualem, quia angulus *b a f* eſt diviſus bifariam: Ergo latus *e b* eſt æquale lateri *e f*. (2. 14.) 2. Ob eandem rationem probari poterit *e g* eſſe æquale *e f*. Et quia hæ lineæ *e b*, *e f*, *e g* ſunt perpendiculares ad latera trianguli, circulus *b f g* tanget latera in his punctis. (4. 5.)

22.

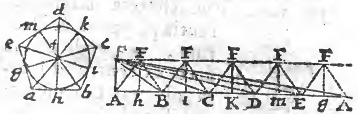
22. Omne quadrilaterum *afed* in circulo deſcriptum habet angulos oppoſitos ſimul ſumtos duobus rectis æquales. Nam ſi per punctum *a* ducatur tangens *gab* & diagonalis *ae*, erit angulus *afe* æqualis angulo *eag*, (4. 17.) & angulus *ade* angulo *eab*; (4. 17.) & per conſequens quia duo *eab* & *eag* ſunt æquales duobus rectis, hi duo anguli oppoſiti *f* & *d* etiam æquales erunt duobus rectis. Similiter probari poterit angulos *fed* & *fad* fore æquales duobus rectis, ſi quis ſaltem concipiat aliam tangentem ad punctum *f*.



23. Converſa hujus propoſitionis etiam manifeſta eſt; nim. omne quadrilaterum, cujus anguli oppoſiti ſunt æqualesduobusrectis inſcriptum eſſe circulo, id eſt, poſſe habere circulum qui tangat omnes illius quatuor angulos.

24. Omne polygonum circa circulum deſcriptum eſt æquale triangulo rectangulo, cujus unum crus eſt æquale ſemidiametro circuli, & alte-

terum toti circumferentiæ polygoni. Sit linea *F A* æqualis ſemidiametro *f h*, & perpendicularis infinita A B C D, &c. in qua ſumatur A *h* æquale *a h* & *h* B æquale *h b* & B *i* æquale *b i*

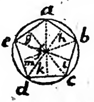


& *i C* æquale *i c* &c. ita ut tota A B C D E A ſit æqualis toti circumferentiæ polygoni *a b c d e a*. Ulterius ſit *F F F* parallela A B, ita ut omnes perpendiculares *h* F, *i*F, *k*F, &c. ſint æquales ſemidiametro *f h* vel *f i* &c. manifeſtum erit triangulum A F B eſſe æquale triangulo *a f b* & triangulum B F C triangulo *b f c* & C F D, triangulo *c f d* &c. Sic omnia hæc triangula ſimul ſumta erunt æ- ...lia toti polygono. Sed triangu- ... F A A eſt æquale omnibus his ...ngulis ſimul ſumtis, quia ſi ducantur lineæ B F, C F, D F, &c. triangulum F A B erit æquale triangulo F A B, & F B C æquale F B C &c.

(3.

(3. 16.) Ergo etiam totum triangulum F A A eſt æquale polygono ; Q. E. D.

25. Omne polygonum regulare eſt æquale triangulo rectangulo, cujus unum crus eſt tota circumferentia polygoni, & alterum, perpendicularis ducta ex centro ad latera polygoni. Demonſtratio eſt eadem cum præcedente propoſitione. Nam omnia perpendicula *fh*, *fi*, *fk*, &c. ſunt æqualia &c.



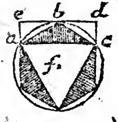
26. Omne polygonum circumſcriptum eſt majus circulo, & omne polygonum inſcriptum eſt minus illo. Quod manifeſtum eſt, quia id quod continet majus eſt eo quod continetur.

27. *Perimeter* (vel circumferentia) omnis polygoni circumſcripti major eſt circumferentia circuli, perimeter omnis polygoni inſcr eſt minor illa : hoc etiam man um eſt per 21. Libri ſecundi.

28. Si in minori ſegmento circuli *abc* deſcribatur triangulum Iſo-

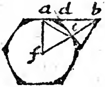
ſce-

ſceles, ita ut *a b* ſit æqualis *b c*: erit triangulum illud majus dimidio ſegmenti. Nam ſi ducatur tangens *e b d*, tunc erit parallela ad *a c*, eſt enim perpendicularis ad *f b* (4. 5.) cui



etiam *a c* perpendicularis eſt, (4. 6.) & præterea terminetur parallelogrammum rectangulum *a e d c*: erit hoc majus ſegmento circuli *a b c*. Sed triangulum *a b c* eſt ſemiſſis parallelogrammi *a e d c*. (3. 18.) E. triangulum *a b c* eſt majus dimidio ſegmenti *a b c*.

29. Sit tangens *a b d* & ſecans *f c b*, & recta *a c*, ut & alia tangens *c d;* dico triangulum *d b c* excedere dimidium trianguli mixti, rectis *a b*, *c b*



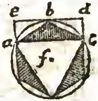
& arcu *c a* comprehenſi: nam cum in triangulo *d b c* angulus in *c* ſit rectus, (4. 5.) latus *d b* erit majus latere *d c* (2. 17.) ſed *d c* eſt æquale *d a:* (4. 7.) Ergo *d b* eſt majus *d a:* E. triangulum *c b d* eſt majus triangulo *c a d*: (3. 17.) E. m. majus dimidio

totius *c b a*. Sed tiangulum *c b a* eſt majus triangulo mixto, arcu *a c*, & rectis *b c*, *b a*, comprehenſo: E. m. triangulum *d b c* eſt majus dimidio trianguli mixti *a b c*.

30. Ex hiſce duabus propoſitionibus ſequitur, quod ſi multiplicata fuerint latera polygonorum regularium, exinde fieri poſſe circumſcripta & inſcripta, ita ut differentia, qua circumſcriptum excedet circulum, vel qua circulus excedet inſcripum, etiam pro lubitu minor reddi poſſit; nam ſi de quacunque quantitate auferatur plus quâm dimidium, & de reſiduo etiam plus quàm dimidium & iterum de hoc reſiduo plus quàm dimidium & ſic aliquoties, tandem perveniemus ad reſiduum minimum deſideratum; quod natura notum eſt. Sic, poſtquam inſcriptum eſt triangulum, quod minus eſt circulo tribus magnis ſegmentis, adhuc inſcribi poteſt hexagonum, quod quidem majus eſt triangulo; ſed minus tamen eſt circulo ſex parvorum ſegmentorum, quæ in adjecta figura alba ſunt. Sed hæc ſex parva ſegmenta ſimul ſumta

noi

non continent tantùm ſpatium, quantum ſemiſſis trium priorum ſegmentorum (4. 28.) Et licet adhuc inſcribi poſſit dodecagonum, quod circulus excedet duodecim parvis ſegmentis; nihilominus duodecim hæc ſimul ſumta non æquivalent ſemiſſi ſex ſegmentorum hexagoni; & ſic, multiplicando latera polygoni, pro lubitu quis diminuere poteſt differentiam, qua circulus excedet polygonum inſcriptum. Similiter, poſtquam triangulum circumſcriptum eſt, adhuc circumſcribi poteſt hexagonum, poſtea dodecagonum, & figura viginti quatuor laterum &c.



31. Omnis circulus eſt æqualis triangulo rectangulo, cujus unum crus (ex. gr. perpendiculum) eſt ſemidiameter, & alterum (ex. gr. baſis) eſt linea recta, æqualis circumferentiæ circuli. Nam triangulum hoc erit majus quovis polygono inſcripto, & minus quovis polygono circumſcripto: (per 24. 25. 26. & 27. lib. 4.) E. erit æqualis circulo. Nam ſi eſſet

majus, tunc licet minima eſſet differentia, adhuc tamen conſtrui poſſet polygonum circumſcriptum, cujus differentia à circulo minor eſſet, differentiâ ejuſdem circuli & trianguli rectanguli: & ſic polygonum circumſcriptum eſſet hoc triangulo minus, quod abſurdum eſt. Similiter, ſi triangulum hoc eſſet minus circulo, conſtrui adhuc poſſet polygonum inſcriptum, quod majus eſſet hoc triangulo; quod eſt impoſſibile.

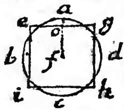
Hoc genus demonſtrationis, quod nunc adhibemus & per impoſſibile *appellatur, inter pulcherrima veterum inventa numeratur; tota quippe Geometria* Indiviſibilium *in eo fundatur: ita ut mirari neceſſum habeamus, quoſdam recentiorum autorum eam rejeciſſe tanquam mancam & indirectam. Quod ſi verò quiſpiam tam delicati fuerit ingenii, ut nullam demonſtrationem perferre poſſit, quæ non concludat directè & poſitive, tunc facile erit eam convertere in regularem & directam: Nam ſaltem id pro principio ponere debemus, quod* ſi duæ quantitates determinatæ *a* & *b* tales fuerint, ut

ut quævis alia quantitas conceptibilis, quæ major vel minor eſſet quàm *b*, etiam major vel minor eſſet quàm *a*, tunc duæ quantitates *a* & *b* erunt æquales. *Poſito hoc principio, quod revera ex ſe manifeſtum eſt, probari poterit directe triangulum illud eſſe æquale circulo, quoniam quævis figura, quæ ſaltem concipi poteſt (inſcripta) minor circulo, etiam minor eſt triangulo; & quævis figura (circumſcripta) major circulo, etiam major eſt triangulo.*

Hoc eſt, quod quadraturam circuli *appellant, quæ conſiſtit in eo, ut conſtituatur quadratum vel triangulum vel quævis figura rectilinea æqualis circulo; quod fieret, ſi inveniri poſſet linea recta æqualis circumferentiæ, ceu videre eſt in ipſa propoſitione; ſed hæc æqualitas nunquam inventa eſt Geometricè.*

32. Linea diſpoſita circulariter, plus ſpatii continebit, quam quævis alia figura polygona regularis, quæcunque etiam illa fuerit. Si circumferentia circnli *a b c d* diſponeretur in formam quadrati vel alterius po-

lygoni regularis, ita ut omnia latera *e g*, *g h*, *h i*, *i e*, ſimul ſumpta æqualia ſint circumferentiæ *a b c d*; dico circulum eſſe majorem polygono. Nam



circulus eſt æqualis triangulo, cujus unum latus eſt circumferentia, & alterum ſemidiameter *f a*: polygonum v. eſt æquale triangulo, cujus unum latus etiam eſt eadem circumferentia *a b c d* (vel latera *e g h i*) & alterum latus *f o* (4. 25) Et quemadmodum *f o* minus eſt quàm *f a*, ſic totum triangulum ſecundum æquale polygono, erit minus primo triangulo, quod æquale eſt circulo: & per conſequens polygonum hoc erit minus circulo; Q. E. D.

Hoc eſt quod volunt, quando communiter dicunt, inter omnes figuras Iſoperimetras, *vel quæ habent æqua- circumferentias, maximam eſſe circulum.*

LIBER QUINTUS.

De Solidis.

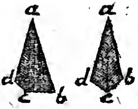
1. LInea recta eſt ſimpliciter *recta* ad planum, vel *erecta* in plano *ad angulos rectos*, quando neque in hanc neque in illam partem eſt magis inclinata, ut columna in pavimento.

2. Duo plana ſunt parallela, quando omnes perpendiculares vel rectæ, inter plana ductæ, æquales ſunt.

3. Planum eſt perpendiculare vel *rectum* ad aliud planum, quando neque in hanc neque in illam partem eſt magis inclinatum, ut murus in ſolo.

4. *Angulus ſolidus* oritur, quando tria vel plura plana ſe contingunt in uno puncto, ut punctum adamantis bene præparati.

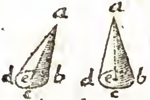
5. Si concipiatur linea *a b* fixa in puncto *a* & poſtea mota ſecundum longitudinem laterum polygoni *b c d*, deſcribet ea per motum hanc



figuram, quæ appellatur *Pyramis.*

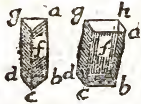
6. Polygonum appellatur *baſis* pyramidis.

7. Si linea *a b* moveatur ſecundum



longitudinem circuli *b c d*, deſcribit *conum*, cujus *baſis* eſt hic circulus; & linea ducta à vertice ad centrum circuli *e*, eſt *axis.*

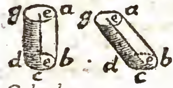
8. Si linea *a b* moveatur uniformi-



ter circa duo polygona *b c d*, *a f g*, quæ ſint ſecundum latera & angulos mutuo & in totum æqualia, ut & parallela, ita ut latera æqualia ſibi reſpondeant parallela, *a f*, *b c*, *f g*, *c d* &c. tunc hæc linea per motum producet figuram, quæ dicitur *Priſma:* ejus polygona ſunt *baſes.*

9. Si baſes priſmatū ſunt parallelogramma, appellatur *Parallelopipedum.*

10. Si linea *a b* moveatur uni-

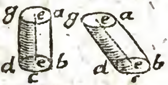


formiter circa duos circulos æquales & parallelos, deſcribit *Cylindrum.*

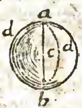
11. Li-

11. Linea quæ jungit centra *e e* baſium eſt *axis* cylindri.

12. In omnibus his figuris, quando axis eſt perpendicularis ad baſin *d e c*, illæ appellantur Iſoſceles; Si verò axis eſt inclinata, ſunt ſcalenæ.



13. Si ſemicirculus *a d b* revolvatur circa ſuam diametrum, deſcribit *ſphæram* vel globum, cujus *axis* eſt *a b*; *centrum* *c* idem eſt cum centro ſemicirculi. Omnis linea ducta per centrum *c* & utrinque terminata per ſuperficiem ſphæræ, appellatur *Diameter* & dici poteſt *axis*.



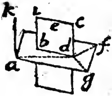
14. Omnes lineæ ductæ à centro *c* ad circumferentiam, dicuntur *radii*, & ſunt inter ſe æquales.

15. Duæ lineæ rectæ, quæ ſe mutuo ſecant, ſunt in eodem plano, & per conſequens omne triangulum etiam eſt in uno plano.

16. Si duo plana *e db*, & *d a b* ſe mutuo ſecent, id fiet in linea recta

d b, quæ appellatur *communis ſectio.*

17. Si linea *c d* eſt perpendicularis ad duas lineas *f d* & *g d*, in plano *f g d* exiſtentibus, illa etiam erit perpendicularis ad planum.



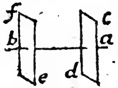
18. Si linea *c d* eſt perpendicularis ad tres *f d*, *g d*, *a d*, hæ tres lineæ ſunt in uno plano.

19. Si duæ lineæ *d c*, *b i* ſunt perpendiculares ad idem planum *f d b*, erunt illæ parallelæ.

20. Si duæ lineæ *d c*, *b i* ſint parallelæ, & ducatur quævis alia linea recta à quovis puncto unius lineæ ad alteram, ut *d b*, hæ tres lineæ erunt in eodem plano.

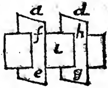
21. Si duæ lineæ *d c*, *b i* ſint parallelæ tertiæ *a k*, licet illæ cum hac non exiſtant in eodem plano, inter ſe tamen parallelæ ſunt.

22. Si una atque eadem linea *a b* eſt perpendicularis ad duo plana *c d*, *e f*, tunc hæc ſunt parallela.



23. Si duo plana parallela *d h g*, *a f e*,

a f e ſecentur per planum aliquod tertium *i*, communes illorum ſectiones *h g*, *f e*, ſunt parallelæ.



24. Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur; ex his duo quilibet, utut aſſumti, tertio ſunt majores.

Omnes hæ propoſitiones tam manifeſtæ ſunt, ut adhibita exigua attentione non neceſſum ſit pluribus eas probare.

25. Omnes anguli plani, qui angulum ſolidum conſtituunt, ſimul ſumti ſunt minores quatuor rectis. Nam ſi facerent quatuor rectos, non conſtituerent angulum ſolidum, ſed planum. Ergo ut angulus ſolidus fieri poſſit, oportet angulos quatuor rectis minores eſſe.

Suaſor eſſem, ut anguli & figuræ ex charta conſtruerentur, & hac ratione omnia facile comprehendi poſſent.

26. In omni parallelopipedo plana oppoſita ſunt æqualia: quod facile concipi poteſt.

Octo ſequentes demonſtrationes demon-

monſtrabuntur in ſecunda parte elementorum. Nihilominus & hic demonſtrari poſſint, ſi ſolidis ſaltem applicentur, quæ jam probata ſunt de planis lib. 3. & 4. ſed non opus eſt hiſce diu inhærere.

27. Parallelopipeda baſibus æqualibus & planis parallelis contenta ſunt æqualia (vid. 3.14.)

28. Omne parallelopipedum ſecatur in duo priſmata triangularia æqualia ab ipſo plano per duas diametros parallelas adverſorum planorum.

29. Priſmata triangularia ſuper æqualibus baſibus & inter eaſdem parallelas conſtituta, ſunt æqualia.

30. Pyramides in baſibus æqualibus, & in eiſdem parallelis conſtitutæ, ſunt æquales.

31. In genere omnia priſmata, cylindri, coni, in baſibus æqualibus & in eiſdem parallelis conſtituti ſunt æquales.

32. Pyramides & coni, qui habent baſes æquales baſibus priſmatum & cylindrorum, & ſunt in eiſdem parallelis, erunt tertia pars priſmatum vel cylindrorum.

33. Omnis ſphæra eſt æqualis cono, cujus axis perpendicularis eſt ſemidiameter ſphæræ,&baſis planum æquale toti ſuperficiei convexæ ejuſdem ſphæræ.

34. Inter omnes figuras ſolidas, quæ eadem ſuperficie terminari poſſint, maxima eſt ſphærica.

35. Corpus *regulare* eſt, quod continetur figuris regularibus & æqualibus, gaudetque angulis ſolidis æqualibus, ut ſunt.

36. *Tetraedrum* eſt contentum quatuor triangulis æqualibus & æquilateris, tale eſt pyramis, cujus baſis eſt æqualis cuivis faciei ſeu lateri.

37. *Hexaedrum* ſeu *Cubus* conſtat ſex quadratis æqualibus, prout ſunt illi quibus ludimus.

38. *Octaedrum* eſt ſub octo triangulis æqualibus & æquilateris.

39. *Dodecaedrum* eſt ſub duodecim pentagonis æqualibus & æquilateris contentum.

40. *Icoſaedrum* conſtat viginti triangulis æqualibus & æquilateris.

41. Ultra hæc quinque corpora regularia, impoſſibile eſt plura alia in-

invenire; quod ita demonſtratur: Sumantur triangula æquilatera, quæ ſunt inter figuras rectilineas ſimpliciſſima. Ad minimum tria requiruntur ad conſtituendum angulum ſolidum; ſed his tribus conjunctis perfectum oritur tetraedrum: nam hæc triangula in unum punctum coeuntia, relinquunt baſin triangularem ſimilem & æqualem lateribus, ceu videre eſt ex compoſitione.

Junctis quatuor ejuſmodi triangulis oritur angulus Octaedri. Ex quinque talibus triangulis reſultat angulus Icoſaedri.

Sex triangula ſimul juncta non poſſunt conſtituere angulum ſolidum, ſunt enim æqualia quatuor rectis: Sed omnis angulus ſolidus conſtat angulis planis, qui ſimul ſumti minores eſſe debent quatuor rectis: (5.25.) ſic igitur impoſſibile eſt per triangula, alia corpora regularia conficere, præter illa tria.

Si jam aſſumamus quadrata, & tria ſimul jungamus, habebimus cubum; & non poteſt aliud corpus præter cubum per quadrata conſtitui, quia

ſi

ſi aſſumerentur quatuor quadrata & conjungerentur, non efficerent angulum ſolidum, ſed tantùm planum. (ſ. 25.)

Si ſumantur tria pentagona, reſultabit angulus dodecaedri: ſed quatuor pentagona non poſſunt conſtituere angulum ſolidum.

Tandem tria hexagona ſimul juncta, cum efficiant quatuor angulos rectos, angulum ſolidum conſtituere non poſſunt; & tria heptagona vel aliæ figuræ plurium laterum id multò minus præſtare poſſunt: Sic igitur non poſſunt plura præter hæc quinque corpora regularia conſtrui, tria cum triangulis, unum per quadrata, & unum per pentagona.

LIBER

LIBER SEXTUS.

De Proportionibus.

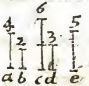
1. QUando loquimur *de magnitudine* item quantitate *magna*, ſemper comparatio inſtituitur inter hanc quantitatem & aliam ejuſdem naturæ, reſpectu cujus illa *magna* dicitur: Sic dicimus montem eſſe parvum, adamantem eſſe magnum, quia comparamus hunc montem cum aliis in quorum comparatione *minor* eſt; & ſimiliter comparamus hunc adamantem cum aliis, in quorum comparatione hic eſt major.

2. Quando hac ratione conſideratur quantitas, ut inveſtigetur quantam *magnitudinem* illa habeat in comparatione ad aliam; tunc magnitudo quæ datur in comparatione ad aliam, appellatur *ratio*, vel ſi rem melius exprimere velimus *comparatio*.

3. Quantitas quæ refertur ad aliam dicitur *antecedens*, ea verò ad quam.

quam alia refertur, *conſequens.*

4. Sumantur quatuor quantitates & comparentur binæ & binæ *a* 4. cum *b* 2. & *c* 6. cum *d* 3. Si reperiatur *a* habere tantam *magnitudinem* in comparatione ad *b*, quam *c* in comparatione ad *d*: tunc dicuntur hæ rationes æquales; i. e ratio *a* ad *b* eſt æqualis rationi *c* ad *d*; Et ut *a* habet duplo majorem quantitatem quam *b*; ſic etiam *c* duplo majorem habebit quam *d*.



5. Sed ſi reperiatur *a* 4. habere majorem quantitatem in comparatione ad *d* 2, quam *c* 6 in comparatione ad *e* 5. Ex. gr. Si reperiatur *a* 4. habere duplo majorem quantitatem quam *b* 2. *c* 6. verò non habere duplam in ordine ad *e* 5. tunc dicuntur hæ rationes inæquales, & *a* habet *majorem rationem* ad *b* quam *c* ad *e*; ita ut *habere majorem rationem* nihil aliud ſit quam habere majorem quantitatem in comparatione ad ſecundam quantitatem, quam tertia non habet in comparatione ad quartam.

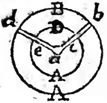
6. Æqualitas rationum appellatur

pro-

proportio; & quando dantur quatuor quantitates, quarum prima habet tantam magnitudinem in ordine ad ſecundam, quantam tertia habet ad quartam, tunc hæ quatuor quantitates vocantur *proportionales*.

Ut melius intelligamus totum myſterium proportionum, quæ inter difficillima Geometriæ referuntur, prout etiam revera ſunt altioris indaginis; illas explicabo aliquo exemplo, quod ſolum meo quidem judicio rem intellectu facilem reddet, quæ tamen aliàs ſatis intricata videtur.

7. Concipiatur circulus *b A d* per motum lineæ *a b* circa punctum *a* deſcriptus; & ſimiliter ſit circulus *c A e* per motum puncti *c*, quod eſt in linea *acb*, deſcriptus; Concipiatur denuo eandem lineam *a c b* adhuc alia vice moveri uſque ad *a e d*; arcus *b B d*, appelletur *B*; arcus *c D e* appelletur *D*; totus circulus *b B A* nominetur *A*; totus circulus *c D a* vocetur *A*: Jam ſi comparemus ab una parte totum circulum *A* ad ar-



arcum *B*; & ab altera parte totum circulum *A* ad arcum *D*, manifeſtè apparebit circulum *A*, habere tantam magnitudinem in ordine ad arcum *B*, quantam circulus *A* habet in ordine ad arcum *D*; & ſi *B* eſt quarta vel 6ta pars circuli *A*, *D* etiam erit quarta vel ſexta pars circuli *A*: quod hac ratione effertur, *ut ſe habet* A *ad* B, *ſic ſe habet* A *ad* D, & brevitatis gratia nos ſic notabimus *A. B :: A. D.*

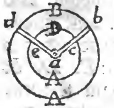
8. Si jam rationem invertimus comparando *B* ad *A* & *D* ad *A* etiam manifeſtè videbimus, quod *B. A :: D. A.* ita ut ſuppoſito *A. B :: A. D*, ſubitò concluſionem inferre poſſimus *invertendo*: Ergo *B. A :: D. A.*

9. Si inſtituamus alternationem comparando antecedens cum alio antecedente, & ſimiliter conſequens cum alio conſequente, concludemus *alternando*; Ergo *A. A :: B. D.* & hoc manifeſtum eſt: nam ſi totus circulus *A* eſt duplum vel triplum (vel quæcunque alia ratio ſit) circuli *A*, arcus *B* etiam erit duplum vel triplum (vel alia quævis ratio) arcus *D*. Hoc manifeſtum eſſe dico, quia

duo

duo circuli *A* & *A* deſcripti ſunt per motum lineæ *a c b*, ita ut dum *b* deſcribit totum circulum *A*, interea *c* deſcribat totum circulum *A*, & dum *b* deſcribit arcum *B*, interea *c* etiam deſcribat arcum *D* & hoc per unum communem motum circularem; niſi quod punctum *c*, dum tardius movetur quam punctum *b* etiam minorem circulum in proportione ad tarditatem deſcribat: Et ſimiliter dum punctum *b* abſolvit arcum *B*, punctum *c* pari modo deſcribit arcum *D*, qui erit minor in proportione tarditatis ſuæ.

10. Si comparemus differentias antecedentium & conſequentium cum ipſis conſequentibus; Ex. gr.



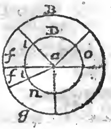
A minus *B*, cum *B*, & *A* minus *D*, cum *D*, videbimus etiam hic dari proportionem & *A* minus *B*. *B* : : *A* minus *D*. *D*; nam manifeſtum eſt arcum *b A d* (qui eſt *A* minus *B*) ſe habere ad arcum *B*, ut arcus *c A e*, (qui eſt *A* minus *D*) ſe habet ad arcum *D*: Et hoc dicitur fieri *dividendo*.

11. Si

11. Si conjungimus antecedentia & conſequentia atque ea comparamus cum conſequentibus habebimus *A* plus *B*. *B* :: *A* plus *D*. *D*; quod dicitur fieri *componendo*.

12. Si concludimus *A*. *A* minus *B* :: *A*. *A* minus *D*, hoc dicetur fieri *convertendo*.

13. Si ſumantur plures quantitates quæ ſint proportionales binæ ac binæ *B*. *f* :: *D*. *i* & *f*. *g* :: *i*. *n* & c. tunc poſſumus concludere ſumendo primas & ultimas, *B*. *g* :: *D*. *n*; & dicetur ratio ex *æquo ordinata*.



Propoſitio quæ ſequitur paulò intricata eſt, ſed non eſt magni momenti & omitti poteſt.

14. Sed poſtquam ſumſimus *f*. *g* :: *o*. *D*, id eſt, ut ſe habet penultima ad ultimam in primo ordine: ſic alia quædam quantitas *o* ſe habet ad primam ſecundi ordinis, tunc concluditur: Ergo *B*. *g* :: *o*. *i*, id eſt, ut prima ad ultimam in primo ordine: ſic hæc alia quantitas *o* ad penultimam ſecun-

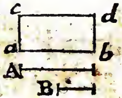
cundi ordinis: & hæc comparatio appellatur *ex æquo perturbata.* Verum hoc ſemper concludi poteſt: nam quia *f. g* vel *i. n* :: *o. D* etiam erit *alternando* & *invertendo o. i* :: *D. n* vel :: *B. g*.

15. Si ſumatur *B* tam multiplex quam *D*, ex. gr. 3 *B*. & 3 *D*. concludemus *B. D* :: 3 *B*. 3 *D*. Et ſimiliter :: 10 *B*. ad 10 *D*. vel etiam :: $12\frac{1}{2}$ *B*. ad $12\frac{1}{2}$ *D*; Et ſic quacunque ratione multiplicentur hæ duæ magnitudines *B* & *D*. ſi modo æqualiter multiplicentur, tunc ſemper prodibit eadem ratio inter magnitudines æqualiter multiplicatas & magnitudines ſimplices. Magnitudines æqualiter multiplicatæ appellantur *æque multiplices* ſimplicium *B* & *D*, & *æque multiplices* inter ſe eſſe dicuntur ut ſimplices.

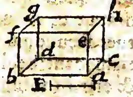
16. Si dividatur *B* eadem ratione ac *D* & ſumatur ex. gr. pars quarta de *B*, & quarta pars de *D*, vel etiam decima à *B* vel decima à *D*, vel alia quævis pars; Hæ partes habebunt ean-

dem rationem inter ſe ac tota. $D :: \frac{1}{4} B. \frac{1}{4} D :: \frac{1}{10} B. \frac{1}{10} D$.&c. Hæc omnia naturâ nota ſunt.

17. *Multiplicare* lineam per aliam lineam, eſt producere parallelogrammum rectangulũ quod pro duobus lateribus contiguis has duas lineas habet. Ex. gr. multiplicetur linea *A* per lineam *B*,& fiat rectangulum *abcd*, ita ut *a b* vel *c d* ſit æqualis *A*, & *b d* vel *a c* ſit æqualis *B*.

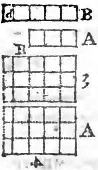


18. Multiplicare rectangulũ vel aliam ſuperficiem per lineam,eſt nihil aliud quàm producere parallelopipedũ (5.9.) cujus baſis eſt hæc ſuperficies & altitudo perpendicularis hæc linea. Ex. gr. multiplicetur ſuperficies *a b d c* per lineam *E*,&fiat ſolidum *a b f g h* &c. ita ut baſis illius ſit ſuperficies *a d*, & altitudo *a c* vel *b f* æqualis E.



19. Ut has multiplicationes bene concipere poſſimus, neceſſe eſt ima-

imaginari duas lineas, ac ſi habere
latitudinem atque earundem tota
longitudinem dividere in parva qua
drata, ceu vides in his figuris, ubi *A*



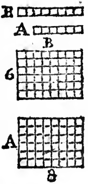
eſt linea, vel potius regula conſtans tribus parvis quadratis, & *B* eſt alia regula conſtans quatuor parvis quadratis ejuſdem latitudinis cum tribus quadratis regulæ *A*. Jam igitur multiplicare *A* per *B*, vel *B* per *A*, eſt nihil aliud, quàm ſumere regulam *B* toties, ac ſunt quadrata in *A*, vel etiam ſumere *A* toties, quot ſunt quadrata in *B*: quod ad idem recidit. Sic *B* ſumtum ter efficit primum rectangulum, quod continebit duodecim quadrata: & *A* ſumtum quater conſtituet ſecundum rectangulum, quod etiam continebit duodecim quadrata, & erit in totum æquale primo.

20. Notandum eſt, eandem multiplicationem nihilominus fieri, etiam ſi in longitudine lineæ non exactè inveniatur certus numerus parvorum quadratorum; ut ſi in *A*, ex. gr

eſſen

eſſent tria quadrata & in *B* quatuor & dimidium, vel quatuor, & alia pars aut exceſſus quicunque, hîc notatus per *d*; tunc *B* ter ſaltim ſumitur, ut multiplicatio fiat *B* per *A*, & compoſitum erit primum rectangulum duodecim quadratorum & trium exceſſuum ceu particularum *d*. Similiter multiplicando *A* per *B*, id eſt, ſumendo *A* quater cum dimidio, vel quater cum tali exceſſu *d*, reſultabit ſecundum rectangulum etiam conſtans duodecim quadratis & tribus *d*.

21. Si concipiamus lineam *B* ad dimidium ſe contrahere, ita ut, manente longitudine ſemper eadem, poſtea habeat octo parva quadrata, (id eſt, longitudo ſit octies major latitudine,) etiam ſequetur, ſi eadem ratione ſe contrahat latitudo *A*, dari in illa ſex parva quadrata: ita ut ſi nunc multiplicetur *B* per *A*, vel *A* per *B*, orientur duo rectangula in totum æqualia duobus prioribus. Nam *B* ſumta ſexies facit primum rectangu-



 lum

lum conſtans 48. quadratis; & *A* ſumta octies facit ſecundum rectangulum etiam conſtans 48. quadratis; & hæc 48. quadrata nec plus nec minus valent quam duodecim illa præcedentis rectanguli, quia unum horum duodecim reſpondet quatuor ex 48, ceu in figura videre eſt, ſic quæcunque tandem latitudo etiam minima hiſce lineis detur, eas in infinitum contrahendo, manifeſtum erit, rectangula quæ per multiplicationem ab illis producuntur ſemper eſſe eadem. Hinc audacter lineæ ut indiviſibiles aſſumi & inter ſe multiplicari poſſunt,cū ex illis rectangulū efficiendū eſt, quia nunquam magnitudo hujus rectanguli variatur, licet vel minima latitudo lineis relinquatur.

22. Facillimum eſt omnia hæc applicare multiplicationi ſolidorum: ſed loco quadratorum,concipi debent cubi: nam ſi concipiatur ſuperficies conſtans duodecim cubis,& ex altera parte linea conſtans duobus cubis, multiplicari poterit ſuperficies duodecim cuborum per lineam duorum ſumendo eandem ſuperficiem toties,

quot

quot ſunt parvi cubi in linea, id eſt, bis, & tunc reſultabit ſolidum conſtans viginti quatuor parvis cubis.

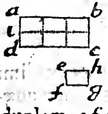
23. Ex his omnibus apparet hæc parva quadrata & cubos in multiplicatione linearum & ſuperficierum, reſpondere unitatibus in multiplicatione numerorum: nam multiplicare numerum per alium, ex. gr. 3 per 5, nihil aliud eſt, quam ſumere 3 toties, quot ſunt unitates in 5, vel ſumere 5 toties, quot ſunt unitates in 3. & productum erit 15. Sicut multiplicare lineam per aliam, eſt ſumere alteram illorum toties quot ſunt quadrata in altera; & multiplicare ſuperficiem per lineam, eſt ſumere ſuperficiem toties quot ſunt cubi in linea.

Alio in loco ſermo erit de multiplicatione ſuperficierum per ſuperficies, vel per ſolida, ex qua reſultant compoſita, quæ appellantur plurium quàm trium dimenſionum.

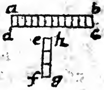
24. Omnes magnitudines exprimi poſſunt lineis: ut ſi magnitudo quædam dupla eſt vel tripla alterius, vel

in quacunque alia ratione, ſaltim ſumantur duæ lineæ, quarum altera dupla ſit vel tripla alterius, vel in quacunque alia ratione ſimili cum ratione magnitudinum. Sic ad expemenda duo tempora, ex. gr. horam & duas horas; vel m. duas accelerationes ſive velocitates, quarum altera ſit dupla alterius, ſaltim ſumantur duæ lineæ *a* dupla *b*, & poteris dicere *a* repræſentare duas horas, vel majorem accrelationem, & *b* reſpondere uni horæ vel minori accrelationi, & cum illis lineis agere ac cum ipſis horis &c.

25. Ad cognoſcendam proportionem rectangulorum, neceſſum eſt ſcire rationem longitudinis unius ad longitudinem alterius, & præterea rationem latitudinis unius ad latitudinem alterius, ex. gr. ad cognoſcendam rationem rectanguli *a c* ad rectangulum *e g*, non ſufficit ſcire longitudinem *a b* eſſe triplam long. *e h*, ſed præterea ſcire debemus *a d* eſſe duplam *e f*: nam ſi ſumatur *a i* æqualis

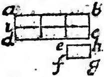


qualis *e f*, rectangulum *b i* erit triplum rectanguli *e g*, quia *a b* eſt tripla *e h* & *a i* æqualis *e f*. Et ulterius, quemadmodum *i d* etiam eſt æqualis *a i*, vel *e f*, (quia ſupponitur *a d* eſſe dupla *a i* vel *e f*,) rectangulum *i c* etiam erit triplum rectanguli *e g*. Sic totum rectangulum *a c* eſt bis triplum rectanguli *e g*, id eſt ſextuplum ſive continet ſexies rectangulum *e g*. Quod dico de ratione dupla & tripla latitudinum & longitudinum, idem quoque intelligi debet de quævis alia ratione: nam ſi *a b* eſt quadrupla *e h* & *a d* tripla *e f*, rectangulum *a c* erit ter quadruplum rectanguli *e g*, id eſt, duodecuplum ipſius *e g*, vel continebit illud duodecies. Sed ſi *a b* eſt duodecupla *e h*, & *e f* tripla *a d*; tunc fiet certa compenſatio. Nam ſi reſpectus ſaltim habeatur ad ſolas latitudines *a b* & *e h*, rectangulum *a c* illud ſuperat & duodecies æquat; ab altera parte nihilominus amittit hunc exceſſum in altitudinibus *a d* & *e f*, dum rectangulum *e g* alterum æquare debet tribus vici-



bus. Si jam comparemus exceſſum & defectum, cum rectangulum *a c* ſit ab una parte duodecies majus, & ab altera parte tribus vicibus minus, reſtat illud tantum eſſe quatuor vicibus màjus *e g*.

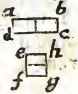
26. Hoc intelligimus, quando dicimus rectangula eſſe in *ratione compoſita* laterum: nam ſi *a b* eſt tripla



e h & *a d* dupla *e f*, rectangulum *a c* habebit rationem compoſitam tripli & dupli ad rectangulum *e g*, id eſt, erit bis triplum, vel ter duplum, vel uno verbo ſextuplum. Similiter ſi *a b* eſt quadrupla *e h*, & *a d* tripla *e f*, rectangulum *a c* habebit rationem compoſitam quadrupli & tripli ad rectangulum *e g*, id eſt, erit ter quadruplum, vel quater triplum, vel uno verbo duodecuplum. Similiter ſi *a b* eſt duodecuplum *e h*,& *a d* ſubtriplum *e f* (id eſt, *e f* ſit triplum *a d*) ratio rectanguli *a c* ad rectangulum *e g* erit compoſita ex ratione duodecupla & ratione ſubtripla, i.e. *a c* erit duodecies ſubtriplum, vel vice verſa, vel uno verbo quadruplum *e g*. Si

Si tertia pars thaleri duodecies ſumatur, reſultant quatuor thaleri; ita ut quatuor thaleri ſint duodecies ſubtriplum thaleri, i. e. faciunt duodecies tertiam partem thaleri.

27. Exinde apparet, ſi latera duorum rectangulorum ſunt reciproce proportionalia, rectangula eſſe æqualia: nam ſi *a b* eſt dupla *eh*, ſit vero reciproce *h g* dupla *b c*, vel etiam ſi *a b* eſt tripla *e h*, & *h g* tripla *b c*, vel quamcunque tandem rationem habuerit *a b* ad *e h*, eandem etiam habeat *h g* ad *b c*, manifeſtum erit, quantum rectangulum *a c* excedit alterum in longitudine, tantum idem excedi in latitudine. Dum ſic longitudo compenſat latitudinem, inter ſe ſunt æqualia. Exinde deducitur hæc propoſitio maximi momenti.

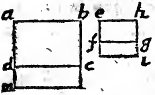


28. Si ſunt quatuor magnitudines proportionales, id quod provenit ex multiplicatione duarum mediarum, ſemper æquale eſt ei, quod producitur ex multiplicaione duorum extremorum; ut ſi *a b*. *e b* ::



hg. *bc*, dico, ex multiplicatione *ab* & *bc* oriri rectangulum *ac*, & ex multiplicatione mediarum *eh* & *hg* oriri rectangulum *eg*, & hæc duo rectangula *ac* & *eg* eſſe æqualia. (6. 27.) Quod ſit per lineas & rectangula, fieri poteſt per quamcunque aliam magnitudinem, quia omnes magnitudines poſſunt exprimi per lineas, & omnes multiplicationes magnitudinum per multiplicationes linearum, i. e. per rectangula. (6.24.)

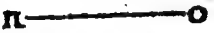
29. Quando rectangula habent latera proportionalia, ita ut *ab*. *eh* :: *ad*.*ef*, tunc dicitur rectangulum *ac* eſſe in *ratione duplicatâ* laterum ad rectangulum *eg*:



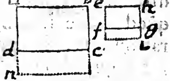
nam ratio *ac* ad *eg* eſt compoſita ex ratione *ab* ad *eh*, & ex ratione *ad* ad *ef*. (6. 26.) Sed ratio *ab* ad *eh* hic eſt (per hypotheſin) eadem cum ratione *ad* ad *ef*: Et ſic ut habeamus rationem rectanguli *ac* ad rectangulum *eg*, ſufficit bis ſumere rationem *ab* ad *eh*. Ex. gr. Si, *ab* eſt dupla *eh*, & *ad* eſt dupla *ef*, rectangulum *ac* erit

erit bis duplum, i. e. quadruplum rectanguli *e g*. Et ſi *a b* eſt tripla *e h*.& *a d* tripla *e f*; erit *a c* ter triplum *eg*, id eſt, nonecuplum: Et ſi *a b* eſt quadruplum *e b*, erit *a c* quater quatruplum i. e. ſextecuplum *e g*.

30. Si ſumatur tertia quædam proportionalis *n o*, ita ut *a b*. *e h* :: *e h*. *n o*, duo rectangula *a c* & *e g* erunt ut lineæ *a b* & *n o*. Nam *a b* ad *n o* eſt in ratione duplicata *a b* ad *e h*. Et ſi *a b* eſt dupla vel tripla, vel quadrupla *e h*, erit *a b* bis duplnm, vel ter triplum, vel quater quadruplum *n o*.



31. Rectangula illa, quæ hac ratione latera proportionalia habent. *a b*. *e h* :: *a d*. *e f*, appellantur *ſimilia*: quorum latera *homologa* ſunt illa, quæ in proportione ſibi reſpondent, ut *a b* & *e h* vel etiam *a d* & *e f*: nã ſi *a b* eſt latus maximum rectanguli *a c*, erit etiam *e h* latus maximum rectanguli *e g*.



32. Omnia quadrata ſunt rectangula ſimilia: nam manifeſtum eſt, ſi

ab eſt dupla vel tripla *eh*; erit etiam *am* dupla vel tripla *hi*, quia *am* eſt æqualis *ab* & *hi* æqualis *eh*.

33. Rectangula ſimilia inter ſe ſunt, ut quadrata ſuper illorum latera homologa conſtituta. Dico rectangulum *ac* eſſe ad rectangulum *eg*, ut quadratum *bm* ad quadratum *ei*: nam tam quadrata quàm rectangula, ſunt inter ſe in ratione duplicata *ab* ad *eh*. (6.29.31.)

34. Ad cognoſcendam rationem duorum ſolidorum parallelopipedorum rectangulorum, neceſſum eſt ſcire rationem baſeos unius ad baſin alterius, & præterea rationem altitudinis unius ad altitudinem alterius: quia ratio unius ſolidi ad aliud compoſita eſt ex rationibus longitudinum, latitudiuum, & altitudinum; quod facile intelligitur ex dictis de rationibus rectangulorum. Nam ſi parallelopipedum baſin habet duplam baſeos alterius parallelopipedi, & altitudinem triplam altitudinis, primum erit bis triplum, vel ter duplum, vel uno verbo ſextuplum alterius.

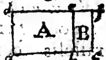
35. Si

35. Si baſes duorum parallelopipedorum reciproce ſunt ut illorum altitudines, parallelopipeda ſunt æqualia. Hoc probatur ut vigeſima ſeptima hujus libri: nam quantum unum excedit alterum in latitudine & longitudine, tantum exceditur in altitudine.

36. Quando parallelopipeda rectangula habent omnia latera proportionalia, appellantur *ſimilia* & ſunt *in ratione triplicata* ſuorum laterum, ut diximus de parallelogrammis eſſe *in ratione duplicata*.

37. Parallelopipeda rectangula ſimiliter inter ſe ſunt ut cubi, ſuper latera homologa conſtituti: nam tam cubi quàm parallelopipeda ſunt inter ſe in ratione triplicata laterum homologorum.

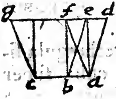
38. Rectangula quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe ut baſes illorum. Sint rectangula *A* & *B* inter parallelas *df* & *ac* conſtituta, ita ut *ad* æqualis ſit *cf*: dico



A. *B* :: *ab*. *bc*, id eſt, rectangulum *A* eſſe ad rectangul um *B*, ut baſis *ab* ſe

ſe habet ad baſin *bc*. Ut ſi, ex. gr. *ab* eſt dupla *bc*, *A* etiam erit duplum *B*; & ſi *ab* ſit tripla, vel quadrupla *bc*; erit etiam *A* triplum vel quadruplum *B*: nam *A* nihil aliud eſt quam linea *ab* multiplicata per lineam *ad* (6.17.) & *B* nihil aliud eſt, quàm linea *bc*, multiplicata per eand. *ad* vel *eb* ipſi æqualem. E. (6.15.) *A*. *B* :: *b*. *bc*.

39. Omnia parallelogramma, quæ ſunt in eiſdem parallelis, ſunt inter ſe ut illorum baſes. Dico parallelogrammum *adeb* eſſe ad parallelogrammum *afgc*, ut *ab* ad *ac*: nam conſtitutis rectangulis punctatis ſuper eaſdem baſes, erunt illa rectangula æqualia parallelogrammis. (3.14.) Sed hæc rectangula ſunt ut illorum baſes: (per præcedentem) E. parallelogramma etiam ſunt ut illorum baſes, nim. *adeb*. *afgc* :: *ab*. *ac*.



40. Triangula in eiſdem parallelis conſtituta ſunt ut baſes; ſunt enim ſemiſſes parallelogrammorum.

41. Quan-

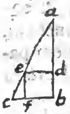
41. Quando triangula habent baſes ſuas in eadem linea recta, & eorum vertix incidit in idem punctum, tunc cenſentur eſſe inter eaſdem parallelas, ut *ade* & *cde*, vel etiam *ade* & *bde*.

42. Si in triangulo ducatur linea parallela ad baſin, hæc proportionaliter interſecabit trianguli crura.

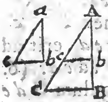


Sit triangulum *abc* & linea *de* parallela ad *bc*, dico *ad*. *ae* :: *ab*. *ac*. & :: *db*. *ec*. Nam ſi concipiantur lineæ *cd* & *eb*, triangulum *ced* erit ad triangulum *ead*, ut *ce* ad *ea*: (6. 40. 41.) ſimiliter triangulum *bde* ad triangulum *dae*, eſt ut *bd* ad *da*. Sed triangulum *ced* eſt æquale triangulo *bde*: (3. 16.) E. etiam triangulum *bde* ſive *ced* eſt ad triangulum *ead* ut *bd* ad *da* vel ut *ce* ad *ea*: ergo etiam *bd*. *da* :: *ce*. *ea*, quia tam ratio *bd* ad *da*, quàm ratio *ce* ad *ea* exprimunt eandem rationem trianguli *bed*, vel *ced* ad triangulum *ead*.

43. Si in triangulo *a c b* ducatur linea *d e*, parallela ad baſin *c b*, dico *e d. c b* :: *a d. a b* vel :: *a e. a c* : nam ducta *e f* parallela ad *a b*, erit *f b* æqualis *e d*. (3.9.) ſed per præcedentem *f b. c b* :: *e a. c a* :: ergo *e d, c b* :: *e a. c a* vel :: *d a. b a*.



44. *Triangula ſimilia* appellantur illa, quæ habent omnes tres angulos æquales, id eſt, ſingulos hujus ſingulis alterius, licet triangula ipſa ſint inæqualia. Ex. gr. ſi angulus *A* eſt æqualis ang. *a*, & angulus *B* ang. *b*, & ang. *C* ang. *c*, totum triangulum *A B C* erit ſimile triangulo *a b c*.

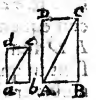


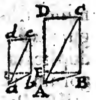
45. Si duo triangula habuerint duos angulos duobus angulis utrumque utrique æquales, etiam reliquus reliquo æqualis, & triangula ipſa ſimilia erunt : nam cũ tres anguli in quovis triangulo efficiant duos rectos, (2.9.) neceſſum eſt, ſi duo anguli unius trianguli ſunt æquales duobus rectis alterius trianguli, etiam tertium unius tertio alterius æqualem eſſe.

46. O-

46. Omnia triangula ſimilia habent ſua latera (circa angulos æquales) proportionalia. Dico *AB*. *ab* :: *AC*. *ac* :: *BC*. *bc*. Nam ſi in majori triangulo *ABC* ſumatur *Ab* æquale *ab*, & *Ac* æquale *ac*, triangulum *Abc* totum æquale erit triangulo *abc*; (2.11.) ſic angulus *Abc* eſt æqualis ang. *abc* (2.11.) ergo etiam æqualis eſt angulo *B*, qui per hypotheſin æqualis eſt ang. *b*: Ergo Linea *bc* eſt parallela lineæ *BC*: (1.31.) Ergo (6.42.43.) *Ab*. *AB* :: *Ac*. *AC* :: *bc*. *BC*.

47. Omnia triangula ſimilia, inter ſe rationem duplicatam habent ſuorum laterum homologorum. Sit *abc* ſimile *ABC*, ita ut *ab*. *AB* :: *bc*. *BC*. Primò, ſi *b* & *B* ſunt anguli recti, ſint terminata rectangula *bcda*, & *BCDA*, hæc rectangula *bd* & *BD* erunt inter ſe in ratione duplicata lateris *bc*, ad latus homologum *BC*, vel ut quadratum ſuper *bc* conſtitutum, ad quadratum ſuper *BC* (6.29.33.) Sed triangu-



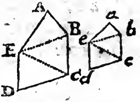


gu-

gulum *a b c* eſt ſemiſſis rectanguli *b c d*, (3.8.) & triang. *A B C* eſt ſemiſſis rectanguli *B C D*. (3.8.) Ergo etiam hæc triangula ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum homologorum, &c. Secundò, ſi triangula non ſunt rectangula, ut in figura ſecunda, ſint ductæ parallelæ *a d* & *A D*, & poſtea ſint conſtituta rectangula *b c d e* & *B C D E*, 1. triangula *a d c* & *A D C* erunt ſimilia, quia angulus *d* eſt æqualis angulo *D*. nimirum ambo recti. Et præterea, angulus *d a c* eſt æqualis ang. *D A C*, quia ſunt æquales angulis *a c b* & *A C B* : (1.31.) Ergo *a c*. *A C* :: *c d*. *C D*. (6.46.) Ergo *a c*. *A C* :: *b c*. *B C* : (per hypotheſin) E. *c d*. *C D* :: *b c*. *B C* : & per conſequens etiam rectangula *b d* & *B D* ſunt ſimilia (6.31.) & inter ſe ſunt ut quadrata ſuorum laterum homologorum : (6.33.) Ergo etiam ſemiſſes illorum, id eſt, (3.18.) triangula *a b c* & *A B C* ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum homologorum, vel ut quadrata &c.

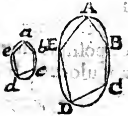
48. Polygona ſimilia ſunt, quæ habent æque multa latera, ita ut ſinguli

guli anguli unius ſint æquales ſingulis alterius polygoni, & latera illorum circa angulos æquales proportionalia, ut ſi angulus *A* eſt æqualis ang. *a*, & ang. B ang. *b* &c.

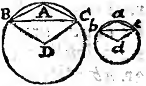


& præterea *A B. a b.* :: *B C. b c* :: *C D. cd* &c. hæc duo polygona ſunt ſimilia.

49. Inter curvilineas vel mixtas figuras, *ſimiles figuræ* ſunt illæ, quibus inſcribi vel circa quas deſcribi poſſunt figuræ ſimiles: ita ut polygono, quod inſcriptum fuit vel deſcriptum circa unam, etiam alteri inſcribi vel circumſcribi poſſit ſimile.



Ex. gr. ſi pro lubitu inſcripſi aliquod polygonum *A B C D E*, majori curvilineæ figuræ, & etiam poſſum inſcribere aliud ſimile minori curvilineæ, *a b c d e*, hæ duæ curvilineæ erunt ſimiles.



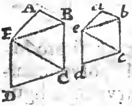
Similiter, ſi ſumſiſſem duas mixtas, ut duo ſegmenta circuli *A B C* & *a b c*,

&

& uni inſcripſiſſem pro lubitu triangulum *A B C*, poſſem verò alteri ſimile *a b c* inſcribere, erunt hæc duo ſegmenta ſimilia; & abſolutis circulis, hæc ſegmenta erunt æquales portiones circulorum, ita ut ſi arcus *B A C* eſt tertia pars ſui circuli: etiam *b a c* erit tertia pars ſui circuli: & ſi ad centrum ducantur lineæ *BD*, *CD*, *bd*, *cd*, anguli *D* & *d* erunt æquales. (Vid. 4. 11. & ſequentes.)

50. Omnes circuli ſunt figuræ ſimiles.

51. Omnia polygona ſimilia dividi poſſunt in æqualem numerum triangulorum, ſimilium. Sint polygona



A B C D E & *a b c d e* & primum ſit diviſum in ſua triangula per lineas *B E*. *C E*: (3. 24.) dico, ſi alterum quoque ſit diviſum per lineas *b e* & *c e*, omnia triangula unius erunt ſimilia triangulis alterius. Ex. gr. *a b e* ſimile eſt *A B E*, nam angulus *a* eſt æqualis ang. *A*, (per hypotheſin) & præterea *A B*. *a b* :: *A E*. *a e*: (etiam per hypotheſin) Ergo

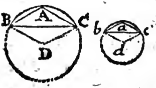
tri-

triangulum *A B E* eſt ſimile *a b e* (6. 46.) Porro probatur angulum *E B C* eſſe æqualem angulo *e b c*, quia angulus *A B C* ſupponitur eſſe æqualis *a b c*, & ceu jam probatum, angulus *a b e* eſt æqualis ang. *A B E*: ſi igitur ab æqualibus auferantur æqualia, angulus *E B C* æqualis erit angulo *e b c*. Similiter probatur angulum *e c b* eſſe æqualem *E C B* & per conſequens (6.45.) totum triangulum *e b c* erit ſimile triangulo *E B C*, & ſic de reliquis.

52. Omnia polygona ſimilia inter ſe ſunt in ratione duplicata ſuorum laterum homologorum, ſive ut quadrata ſuper latera homologa conſtituta. Dico, ut quadratum *A B* ſe habet ad quadratum *a b*, ſic totm polygonum *A B C D E* ſe habet ad polygonum *a b c d e*: nam cum omnia triangula unius polygoni ſimilia ſint triangulis alterius (6. 51.) erunt omnia hæc triangula unius polygoni ad omnia alterius in ratione duplicata laterum homologorum, quæcunque etiam illa fuerint, id eſt, ut quadratum *A B*, ad quadratum *a b*.

53. O-

53. Omnes ſiguræ ſimiles, etiam curvilineæ, inter ſe ſunt ut quadrata ſuper latere quodam figurarum ſimilium ſive inſcriptarum ſive circumſcriptarū conſtituta. Sint ex. gr.



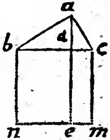
circuli, quibus inſcripti ſint duo triangula ſimilia *b a c* & *A B C*, dico totum circulum *A B C* ſe habere ad circulum *a b c*, ut quadratum *B C* ad quadratum *b c*, ſive quod idem eſt, ut quadratum ſemidiametri *D B* ad quadratum ſemidiametri *d b*: nam circulo *a b c* (ſaltim cogitatione) inſcribi vel circumſcribi poteſt quodcunque polygonum. (4.30.) Sed omne polygonum inſcriptum *a b c* minorem rationem habebit ad circulum *A B C*. quam quadratum ſuper *b c* ad quadratum *B C*, & omne circumſcriptum circulo *a b c* majorem rationem habebit ad circulum *A B C*, prout facile probari poterit per præcedentem & per ea, quæ dicta ſunt de circulo in libro quarto: E. &c.

54. Omnia hæc applicari poſſunt ad

ad ſolida. *Solida ſimilia* ſunt illa, quæ habent angulos æquales & latera proportionalia, vel quibus inſcribitur, vel circumſcribitur &c.

55. Solida ſimilia inter ſe ſunt ut cubi, &c. Vid. 6. 36. 37. &c.

56. Si in triangulo rectangulo *abc* ducatur ab angulo recto *a* perpendicularis *ad* in *hypothenuſam* (ſive latus maximum) *bc*, tria erunt rectangula inter ſe ſimilia, nimirum *adc*, *adb* & totum *bac*: nam 1. quodlibet horum trium triangulorum habet angulum rectum. 2. triangula *abc* & *abd* habent angulum *b* communem :· E. ſunt ſimilia: (6.45.) 3. triangula *abc* & *adc* habent angulum *c* communem : E. ſunt ſimilia.



57. Perpendicularis *ad* eſt media proportionalis inter *cd* & *db*, id eſt, ut *cd*. *da* :: *da*. *db*. Nam cum triangula *cda* & *adb* ſint ſimilia per præcedentem, erit *cd* (crus minus trianguli *cda*) ad *da* (crus majus) ut *ad* (crus minus trianguli *adb*) ad *db* crus majus. (6. 46.)

58.

58. Quadratum *a d* eſt æquale rectangulo ex *c d* & *d b* conſtituto: nam cum *c d. d a :: d a. d b* (per præcedentem) rectangulum extremorum *c d* & *d b* erit æquale rectangulo mediorum *d a* & *d a* (6.28.) Sed cum duo latera hujus rectanguli ſint æqualia, quia *d a* bis ſumitur, ſequitur rectangulum hoc eſſe quadratum *d a*: & ſic propoſitio ſequens generalis poni poteſt.

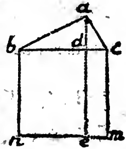
59. Quadratum mediæ proportionalis ſemper æquale eſt rectangulo extremorum.

60. Ad exprimendum rectangulum, ſufficit tres literas adhibere. Ex. gr. *ſi ponitur rectangulum b d c*, tunc volumus exprimere rectangulum, cujus alterum latus eſt *b d* & alterum *d c*; & ſi diceretur *rectangulum b c d*, tunc vellemus exprimere rectangulum, cujus alterum latus eſſet *b c*, & alterum *c d*.

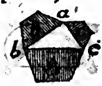
61. In omni triangulo rectangulo quadratum ſuper *hypotheñuſa* (ſive maximo latere) conſtitutum eſt æquale duobus quadratis *crurum*. (vel reliquorum laterum.) Sit quadratum

b c

b c m n per perpendicularem *a d e* in duo rectangula *d e m* & *d e n* diviſum; dico rectangulum *d e m* eſſe æquale quadrato *a c*, & rectangulum *d e n* quadrato *a b*; & per conſequens totum quadratum *b c m n* eſſe æquale quadratis *a c* & *a b*: nam 1. cum duo triangula *a d c* & *b a c* ſint ſimilia (6.56.) erit *dc* ad *ac* (in minori triangulo *a d c*) ut *a c* ad *b c*: (in majori triangulo *b a c*) ergo *ac* eſt media proportionalis inter *dc* & *b c* vel *c m*; ſic quadratum *a c* eſt æquale rectangulo *d c m* (6. 59.) 2. Ob eandem rationem probatur *b a* eſſe mediam proportionalem inter *b d* & *b c* vel *b n* &c.



62. Si in tribus lateribus trianguli rectanguli conſtituantur tres figuræ ſimiles, ſimiliterque poſitæ, maxima erit æqualis duabus reliquis: nam cum figuræ hæ ſimiles ſint ut quadrata in lateribus homologis conſtituta, (6.53.) figura

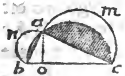


ra *A* erit ad figuras *B* & *C*, ut quadratum *b c* ad quadrata *c a* & *a b*. Sed quadratum *b c* eſt æquale duobus reliquis: (per præcedentem) ergo, &c.

63. Si ſuper maximo latere *b c* fiat ſemicirculus *b a c*, & ſuper reliquis lateribus duo alii ſemicirculi *b n a*, & *a m c*; maximus

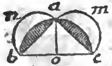


ſemicirculus æqualis erit reliquis duobus. (per præcedentem.) Si ab utraque parte auferatur commune; ſegmenta nim. ſtriata *b a* & *a c*; quod ab utraque parte reliquum, erit æquale; id

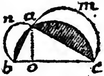


eſt, triangulum *b a c* ab una parte æquale erit duabus lunulis *b n a* & *a m c* ab altera parte: & hæc eſt *quadratura Lunarum Hippocratis*.

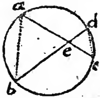
64. Quando triangulum *b a c* eſt eſt Ioſceles, lunulæ ſunt æquales: ita ut triangulum *b a o*, ſemiſſis trianguli *b a c*, ſit æquale cuivis lunulæ: ſed quando trian-



angulum eſt ſcalenum, ut in ſecunda figura, lunulæ ſunt inæquales, & æque difficile eſt dividere triangulum *b a c* in duas partes per lineam *a o*, ut demonſtrari poſſit triangulum *b a o* eſſe æquale lunulæ *bna* & triangulum *o a c* lunulæ *c m a*; æque difficile eſt, inquam, hoc præſtare, quàm invenire quadraturam circuli.

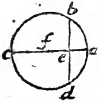


65. Duæ chordæ ſe ſecantes in circulo, habent ſua ſegmenta *reciproca*, id eſt, reciproce proportionalia. Dico ut *a e*. *b e* :: *e d*. *e c*. & per conſequens rectangulum *a e c* eſſe æquale rectangulo *b e d*: nam ſi concipiantur *d c* & *b a*, erunt duo triangula ſimilia, *a e b* & *d e c*. Nam 1. habent angulum ad *e* oppoſitum ad verticem; (1.23.) 2. angulus *d* eſt æqualis angulo *a*, (4.12.) quia inſiſtit eidem arcui *b c* & in eadem circumferentia eſt: Ergo hæc duo triangula ſunt ſimilia; ſic *a e*. *b e* :: *e d*. *e c*. (6.46.)

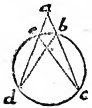


E 66. Si

66. Si *a c* eſt eſt diameter circuli & *d b* perpendicularis, erit *d e* vel *b e* media proportionalis inter *a e* & *e c*, quia *d e* æqualis erit *e b* (4. 6.) ſic *a e. d e* :: *b e* vel *d e. e c.* & quadratum *d e* æquale rectangulo *a e c.*

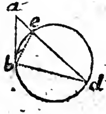


67. Duæ lineæ ductæ à puncto extra circulum aſſumto ad circumferentiam, ab eaque intus terminatæ, inter ſe ſunt reciprocæ ut illarum ſegmenta externa: Dico *a c. a d* :: *a e. a b* & per conſequens rectangulum *c a b* eſſe æquale rectangulo *d a e*: nam ſi concipiantur lineæ *b d* & *e c* erunt duo triangula ſimilia *a b d* & *a e c*: nam 1. angulum *a* communem habent. 2. Angulus *d* eſt æqualis angulo *c*, (4. 12.) quia inſiſtunt eidem arcui *b e*: Ergo triangula *a b d* & *a e c* ſunt ſimilia; (6.45.) ſic *a d. a c* (quæ ſunt majora latera duorum triangulorum) :: *a b. a e.* (quæ ſunt minora latera eorundem triangulorum.)

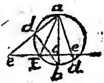


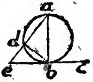
68. Si

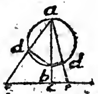
68. Si una harum linearum *a b* tangat circulum in *b*, dum interea altera eundem ſecat in *e* & *d*, tunc *a b* eſt media proportionalis inter *a e* & *a d*: nam ductis lineis *b e* & *b d*, triangula *a b d* & *a e b* erunt ſimilia, quia 1. angulum *a* communem habent. 2. Angulus *abe* eſt æqualis angulo *b d e* (4. 17.) cum ergo hæc duo triangula ſimilia ſint, *a e. a b* :: (quæ ſunt duo latera minoris trianguli *a b e*) :: *a b. a d* (quæ ſunt latera homologa alterius trianguli *a d b*.)



69. Sit diameter *a b* ſecta in *c* per perpendicularem infinitam *c e*, vel intra circulum, ut in prima figura, vel in circumferentia ut in ſecunda figura, vel extra circulum, ut in tertia figura: ſi præterea ex puncto *a* pro lubitu ducta linea recta, ſecans perpendicularem in *e*, & circulum in *d*; dico ſemper *a d. a c* :: *a b*.



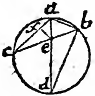




a e. Nam ſi ducatur linea *b d*, erunt duo triangula ſimilia *e a c* & *d a b*, quia 1. angulum habent communem *e a c* & *d a b*. 2. etiam rectum habent; nam ang. *a c e* rectus eſt (per hypotheſin) & ang. *b d a* quoque eſt rectus (4.14.) ergo hæc duo triangula ſunt ſimilia *a d. a c* :: *a b a e*.

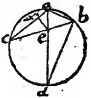
70. In ſecunda figura *a b* ſemper eſt media proportionalis inter *a d* & *a e*, & in prima, media eſt *a E*, ubi circulus lineam *c e* ſecat.

71. Si in triangulo inſcripto, angulus *b a c* eſt diviſus bifariam, id eſt, in duas partes æquales, per lineam *a e d*. Dico *b a. a e* :: *a d. a c*; nam ducta linea *b d*, erunt duo triangula ſimilia *a b d* & *a e c*, quia 1. angulus *d* eſt æqualis angulo *c*. (4.12.) tanquam inſiſtens eidem arcui *a b* & in eadem circumferentia. 2. angulus *b a d* eſt æqualis angulo *e a c* per hypotheſin: E. hæc duo triangula ſunt ſimilia: & propterea *a b. a d* :: *a e. a c*.



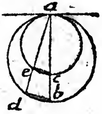
72. Quando angulus in vertice ita diviſus eſt in duas partes æquales, ſeg-

ſegmenta baſis ſunt proportionalia cum lateribus *b a. a c* :: *b e. e c*: nam concipiatur *e f* parallela ad *b a*, tunc erit *b a. a c* :: *e f. f c*. Sed *e f* eſt æqualis *a f*, quia ang. *a e f* æqualis eſt ang. *e a b*. (1. 31.) & per conſequens angulo *e a f*: ſic triangulum *a f e* eſt Iſoſceles;



(2.15.) & vice hujus comparationis *b a. a c* :: *e f. f e* ponere poſſumus hanc *b a. a c* :: *a f. f c*. vel etiam (6. 42.) *b e. e c*. Q. E. D.

73. Si duo circuli ſe intus contingant, & ex puncto contactus *a* ducatur tangens, & perpendicularis *a c b*, quæ per centra duorum circulorum tranſibit, (4.5.) & præterea quævis alia linea ſecans duos circulos in *e* & *d*. Dico ſemper *a e. a d* :: *a c. a b*: nam ductis lineis *e c* & *d b*, triangula *a e c* & *a d b* erunt ſimilia cum habeant ang. communem in *a* &, alium rectum in *e* & *d*. (4.14.)



74. Etiam arcus *e c* erit ad arcum *d b* ut totus circulus *aec* ad circulum *a d b*. (6.49. & 4.11.&c.)

LIBER SEPTIMUS.

De Incommenſurabilibus.

1. MInor quantitas dicitur inpoſterum *metiri* majorem, quando minor aliquoties ſumta exacte æquat majorem. Ex.gr. ponamus ulnam, continere ſex pedes, pes unus *metietur* ulnam, quia pes ſexies ſumtus exacte æquat ulnam.

2. Quantitas, quæ metitur majorem, appellatur *pars* majoris, & major dicitur *multiplex* minoris: ſic pes eſt pars ulnæ, & ulna eſt multiplex pedis.

3. Si ſumatur magnitudo unius paſſus, qui continet pedes duos & dimidium, & tentaverit quis metiri ulnam, id præſtare non poterit, nam ſi ſumatur paſſus tantùm bis, reſultabunt duntaxat quinque pedes, qui nondum æquant ulnam : & ſi idem paſſus ter ſumatur, reſultabunt pedes ſeptem cum dimidio, qui ulnam exce-

cedent: ſic igitur hæc quantitas duorum pedum cum dimidio non metitur ulnam, neque proprie dicitur *pars* ulnæ: nihilominus dicere poſſumus illas eſſe *partes*, nam hæc quantitas continet quinque pedes dimidios: ſed pes dimidius eſt pars ulnæ, nam ſi duodecies ſumatur, eam metitur: ſic igitur paſſus hic continet partes ulnæ, quia continet quinque pedes dimidios, qui ſunt $\frac{5}{12}$ id eſt, quinque partes duodecimæ unius ulnæ.

4. Quando duæ quantitates ita comparatæ ſunt, ut inveniri poſſit tertia quantitas, quæ ſit pars utriuſque, id eſt, quæ utramque metitur, tunc hæ duæ quantitates ſunt *cõmenſurabiles*: ſic quantitas unius paſſus, & ulna ſunt duæ quantitates commenſurabiles, quia dari poteſt tertia quantitas, nimirum pes dimidius, qui metietur ulnam & paſſum: nam pes dimidius quinquies ſumtus æquat paſſum, & idem pes dimidius ſumtus duodecies æquat ulnam.

5. Si vero poſſible non eſt inveni-

nire tertiam quantitatem, quæ metiatur utramque, tunc hæ duæ quantitates ſunt *incommenſurabiles*.

6. Magnitudines commenſurabiles ſunt *ut numerus ad numerum*, id eſt, hæ magnitudines exprimi poſſunt per certos numeros, ita ut magnitudo ſe habet ad aliam magnitudinem, ſic certus numerus ſe habeat ad alium certum numerum. Ex. gr. ſi linea eſt unius ulnæ vel ſex pedum, & alia linea unius paſſus ſ. duorum pedum cum dimidio, hæ duæ lineæ erunt ut numerus ad numerum; nam quia pes dimidius metitur utramque, alteram per quinque & alteram per duodecim, manifeſtum eſt, cum altera contineat quinque pedes dimidios, & altera duodecim, has duas lineas eſſe ut 5. ad 12. & per conſequens ut numerus ad numerum.

7. Si duæ magnitudines non ſunt ut numerus ad numerum, id eſt, ſi poſſibile non eſt exprimere magnitudines per duos numeros, erunt incommenſurabiles: quod certum eſt per præcedentem.

8. Diſpiciendum igitur nunc eſt, an revera tales magnitudines dentur, quæ per numeros exprimi non poſſunt: nam ſi hoc eſt, neceſſum erit dicere, dari magnitudines incommenſurabiles.

9. *Numerus planus* eſt qui provenire poteſt ex multiplicatione duorum numerorum. Ex. gr. ſex eſt numerus planus, quia provenit ex multiplicatione 3. & 2. nam bis ter ſunt ſex. Similiter 15. eſt numerus planus, quia provenit ex multiplicatione 5. per 3. Similiter 9. eſt numerus planus, quia provenit ex 3. per 3.

10. Numeri, qui in ſe mutuo multiplicati, planum producunt, appellantur *latera* plani, ut 2. & 3. ſunt latera plani 6. Similiter 3 & 5. ſunt latera plani 15.

11. Si concipiantur unitates ut parva quadrata, ea in formam rectanguli collocari poterunt, ſi numerus illarum fuerit planus. Ex. gr. 12. quadrata collocantur in formam rectanguli, cujus alterum latus continet 6. & alterum 2. Similiter 48.

conſtituet rectangulum, cujus alterum latus eſt 12. & alterum 4. Vid. fig. ſequentes *B* & *C*.

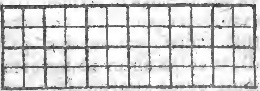
12. *Numerus quadratus* eſt planum, cujus latera ſunt æqualia, ut 4. reſultans ex multiplicatione 2. per 2. ut 9. provenies ex 3. per 3. ut 16. ex 4. per 4. &c.

13. Numerus quadratus collocari poteſt in formam quadrati; & numerus qui collocari poteſt in formam quadrati, eſt quadratus, & qui non poteſt hac ratione collocari, non eſt numerus quadratus.

14. Numeri *plani ſimiles* ſunt, qui collocari poſſunt in formam rectangulorum, ſimilium, id eſt, quorum latera ſunt proportionalia ut 12. & 48. nam latera plani 12. ſunt 6. & 2.

B


A


C


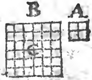
ceu videre in figura *B*. & latera plani

ni 48. ſunt 12. & 4. ceu videre eſt in figura *C*. ſed 6. 2 :: 12. 4.

16. Omnis numerus collocari poteſt in forma lineæ rectæ, & in hoc ſtatu haberi poteſt pro plano: hinc 3. in figura *A* erit planum ſimile 12. nam latera plani 3. ſunt 3. & 1. quia ſemel ter facit ter, & latera plani 12. ſunt 6. & 2. ſed 3. 1 :: 6. 2.

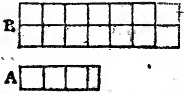
17. Dantur numeri, qui non ſunt plani ſimiles, ut ab 1. uſque ad 10. ſunt 1. 4. 9. qui cum quadrati ſint, ſimiles ſunt; poſtea ſunt 2. 8. qui habent unum latus duplum alterius: reliqui non ſunt plani ſimiles, ut 3. 5. 6. 7.

18. Si numerus quadratus multiplicet alium num. quadratum, producetur tertium quadratum. ex. gr. *A*. 4. & *B*. 9. ſint numeri quadrati & ſe multiplicent, producantque numerum *C*. nim. 36. Dico hunc numerum tertium eſſe quadratum: nam multiplicare *B* per *A* eſt ſumere *B* toties, quot ſunt unitates in *A*. Sed totum numerum *B*. 9 conſiderare poſſum, tanquam



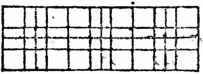
quam quadratum unicum, illudque toties ſumere, quot ſunt unitates ſ. parva quadrata in *A*: & quemadmodum unitates in *A* ſunt poſitæ in formam quadrati; ſic etiam toties quadratum *B* ponere poſſum, tanquam tot unitates: hinc erunt 4 *B*. quæ conſtituent quadratum totum *C*. 36.

19. Si ſint duo numeri plani ſimiles, major dividi poteſt in tot quadrata, quot ſunt unitates in minori. *A*. 3. & *B*. 12. ſunt plana ſimilia: ita ut latus 3. ad latus 6. ſit ut latus 1. ad latus 2. Poſſum dividere planum *B*. 12. in tria quadrata ſimiliter locata



ut tria parva quadrata plani *A*, & quodlibet majorum quadratorum in *B* reſpondebit 4. illorum in *A*. Similiter ſi plana ſunt 8. & 72. poſſum dividere 72. in 8. quadrata, quorum quodlibet continebit 9. illorum in minori plano 8. Idem etiam accidet, ſi vel unus vel ambo ſunt numeri fracti, ut ſi *A* continet 3. cum dimidio & *B* 14. poſſum dividere 14. in tria

tria quadrata cum dimidio, eodem modo diſpoſita ut in *A*, ceu videre eſt in parvis quadratis punctatis, quæ figuris adjecta ſunt. Similiter ſi plana ſunt *B*. 12. & *D*. 27. poſſum dividere 27. non tantùm in tria quadrata eodem modo diſpoſita ut illa in *A*, ſed etiam in 12. eodem modo poſita ut illa in *B* : quod videre eſt per lineas punctatas.

D 

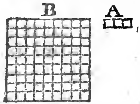
Ad hoc præſtandum, tantum dividuntur latera majoris plani in tot partes, in quot ſunt diviſa latera homologa minoris plani. Figuræ ipſæ rem totam facilem reddent.

20. Numeri plani, qui ſic dividi poſſunt, ut tot ſint quadrata in majori plano, quot ſunt unitates in minori, ſunt ſimiles : hæc eſt converſa præcedentis.

21. Duo numeri ſimiles in ſe mutuo multiplicati producunt numerũ quadratum. Nam diviſo majori plano in tot quadrata, quot ſunt unitates in altero plano (7. 19.) Multiplicabitur

pla-

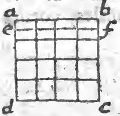
planum per aliud, ſi majora quadrata majoris plani toties ſumantur, quot ſunt unitates vel parva quadrata in minori plano, id eſt, toties quot ſunt ipſa. Sed multiplicare numerum quadratum per eundem numerum, nihil aliud eſt quàm conſtituere quadratum ex quadratis. Ex. gr. *A*. 3. & *B*. 27. cum ſint plana ſimilia, conſidero *B*. 27. ut planum compoſitum ex tribus majoribus quadratis, ut *A*. 3. eſt planum compoſitum ex tribus unitatibus, vel tribus parvis quadratis. Si jam ſumo hæc tria majora quadrata toties, quot ſunt unitates in *A*, id eſt, ter, tunc produco ter tria quadrata majora *B*, i. e. 9. quadrata, quorum quodlibet reſpondet 9. illorum, quæ ſunt in *A*, & omnia 9. quadrata in *B* reſpondebunt 81. illorum in *A*; ita ut *A*. 3. multiplicatum in *B*. 27. producat 81. qui eſt numerus minorum quadratorum in formam quadratam diſpoſitus, & per conſequens (7.13.) hic numerus 81. eſt quadratus. Similiter ſi plana ſunt



12. & *D*. 27. divido 27. in 12. quadrata, quæ multiplico per 12. & reſultant 144 majora quadrata poſita in formam quadrati, quæ reſpondent 324 illorum in minori plano.

22. Si duo numeri plani ſint ſimiles, quacunque ratione unum diſponatur, eadem ratione poteſt diſponi alterum. Sint 3. & 12. plana ſimilia ut ſuprà. Si diſponantur 12. in lineam rectam ad conſtituendum rectangulum, cujus latus unum ſit 12. & alterum 1. Dico etiam 3. poſſe diſponi in rectangulum ſimile, cujus latus unum habebit 6. & alterum ſemiſſem unius &c.

23. Si numerus dividat alium numerum quadratum, producet numerum tertium, qui erit planus ſimilis diviſori. Sit quadratum *a c* 16. & dividatur per quemcunque numerum ex. gr. per 8. Id quod fit, ſi ſumatur octava pars lateris *a d*, nimirum *a e* & ducatur parallela *e f*; nam reſultabit planum *a f*, quod erit octava pars quadrati *a c*: Sed di-



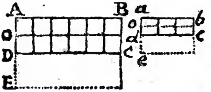
vi-

videre numerum vel planum per 8. eſt ſumere octavā partem hujus numeri ſive plani. Dico *af* eſſe planum ſimile ad 8. Nam cum 8. ſit diſpoſitus in lineam rectam ad-conſtituendum rectangulum, cujus unum latus ſit 8. & alterum 1. rectangulum *af* ipſi erit ſimile, quia *ae* ſumta eſt octava pars ab *ad* vel *ab*: Ergo ut 8. ad 1. (quæ ſunt latera plani 8. diviſoris) Sic *ab* ad *ae* (quæ ſunt latera plani provenientis ex quadrato *ac* diviſi per 8.) Ergo &c. Q. E. D.

24. Si duo numeri plani ſe mutuo multiplicantes producant quadratū, ſunt ſimiles.

25. Duo numeri plani non ſimiles ſe mutuo multiplicantes, non poſſunt producere numerū quadratū. Hæ propoſitiones ſunt corol. præcedentium.

26. Si duo numeri ſint plani ſimiles, eorum æquè multiplices quicunque, & illorum partes æquales quæcunque, ſunt etiam plani



ſimiles. Sint plani *abcd* 3. & *ABCD*.

B C D 12. ſimiles, ita ut *ab. A B* :: *b c. B C.* Dico ſi ſumatur duplum unius & duplum alterius (vel quivis alius æque multiplex) hæc dupla erunt ſimilia : Nam ſumta *a e* dupla *a d*, & *A E* dupla *A D*, ad conſtituendum planum *b e* duplum plani *b d* & planũ *BE* duplũ plani *BD*, manifeſtum eſt ut *ad. AD* :: *a e. A E.* ſed *a d. A D* :: *a b. A B*. Ergo etiam *a e. A E* :: *a b. A B* ; Et per conſequens plana *b e* & *B E* ſunt ſimilia. Similiter ſe habebit ſi ſumantur illorum ſemiſſes *b o*, *B O* vel quævis aliæ partes æquales.

27. Si duo numeri ſint plani non ſimiles, eorum æquè multiplices quicunque, & eorum partes æquales quæcunque etiam erunt non ſimiles. Hoc ſequitur ex præcedente.

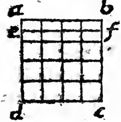
28. Inter duos numeros planos ſimiles quoſcunque, incidit numerus medius proportionalis. Sint numeri plani ſimiles 2. & 8.



Dico poſſibile eſſe invenire tertium numerum qui medius proportionalis

erit :

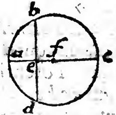
erit: nam ſi concipiatur planum 8. in lineam rectam *AB* diſpoſitum,& planum 2. etiam in lineam rectam *AD*,& ex his duabus lineis fiat planum *AC* 16. hoc planum *AC* 16. proveniet ex multiplicatione duorũ numerorum 2. & 8. (6. 17. & ſeqq.) & per conſequens numerus parvorum quadratorum totius plani *AC* 16. erit numerus quadratus, (7. 21.) & poteſt diſponi in figuram quadrati (7.13.) Sit igitur diſpoſitus in figuram quadratam *ac*; Sic quadratum *ac* erit æquale plano *AC*, quia eſt idem numerus aliter ſaltem diſpoſitus. Ergo (6.59.) latus *ab* 4. erit medius proportionalis inter *AD* 2. & *AB* 8.



29. Inter duos numeros non ſimiles non poteſt cadere numerus medius proportionalis. Sint numeri 4. & 6. in lineam rectam diſpoſiti, & ſe mutuo multiplicantes producant planum 24. hoc planum 24. non eſt numerus quadratus; (7. 25.) & per con-

conſequens non poteſt diſponi ut numerus quadratus. Ergo non poteſt haberi numerus medius inter 4. & 6. Nam hic numerus qui nunc concipitur medius multiplicatus per ſe ipſum, produceret numerum quadratum, aliunde æqualem plano ex 4 & 6. (6. 59.) quod eſt impoſſibile quia planum 24. ex 4. & 6. productum non eſt numerus quadratus.

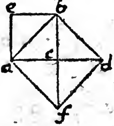
30. Sint duæ lineæ *ae* & *ec*, ut numerus ad alium numerum non ſimilem: ex. gr. ut 1. ad 2. Sit præterea *eb* media proportionalis, ita ut *ae. eb :: eb. ec.* Dico *eb* eſſe incommenſurabilem duobus extremis *ae* & *ec*: nam



cum *ae* & *ec* ſint ut 1. & 2. id eſt, ut numeri non ſimiles (per hypotheſin) æquè ac illorum æque multiplices quicunque, (7.27.) nunquam erit poſſibile invenire numerum medium proportionalem inter *ae* & *ec*, (per præcedentem) & per conſequens *eb* non erit ad *ae* vel *ec* ut numerus ad numerum: Ergo illa eſt incommenſurabilis.

31.

31. Diameter quadrati *a b* eſt incommenſurabilis lateri *a c*. Nam ſumta *a d* duplà *a c* & facto triangulo *a b d*, quod erit ſimile *a b c*, quia cum *c d* ſit æqualis *c b*, angulus *c d b* eſt æqualis angulo *c b d*; (2. 15.) Sic angulus *c d b* eſt ſemiſſis recti æque ac *c a b*. Ergo *a b d* eſt rectus, &c. Sic *a c*, *a b* :: *a b*. *a d*. Ergo *a b* eſt media proportionalis inter *a c* 1. & *a d* 2. Et per conſequens (per præcedentem) incommenſurabilis.



32. *Potentia* lineæ appellatur quadratum quod conſtituitur ſuper illa linea. Potentia lineæ *a c* eſt quadratum *a c b e*, & potentia lineæ *a b* eſt quadratum *a b d f*. Et linea *a b* dicitur *bis poſſe lineam a c*, qui mos loquendi à Græcis tranſumtus & in Geometriam receptus fuit.

33. Diameter *a b* eſt commeuſurabilis *potentiâ* lateri *a c*, id eſt, quadratum *a b d f* eſt commenſurabile quadrato *a b c e*, cum unum ſit duplum alterius.

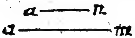
34. Sed ſi ſumatur *a o* media proportionalis inter *a b* & *a c*, hæc media *a o* erit incommenſurabilis in potentia, id



eſt, quadratum lineæ *a o* erit incommenſurabile quadrato *a c*, vel quadrato *a b*: nam quadratum *a c* ad quadratum *a o* eſt in ratione duplicatâ *a c* ad *a o*, (6.29.) id eſt, ut *a c* ad *a b*, (6.30.) Sed *a c* eſt incommenſurabile *a b*: (7.31.) Ergo etiam quadratum *a c* etiam eſt incommenſurabile quadrato *a o*.

35. *Secunda potentia* lineæ eſt cubus, qui hanc lineam pro latere habet.

36. Si ſumantur *a n* & *a m*, duæ mediæ proportionales inter *a c* & *a b*, ita ut *a c*. *a n* :: *a m*. *a b*. erit linea *a n* incommenſurabilis ſecunda potentia *a c*, id eſt, cubus *a c* erit incommenſurabilis cubo *a n*, quia cubus *a c* eſt ad cubum *a n* in ratione triplicata lateris *a c* ad latus *a n*, id eſt, ut *a c* ad *a b*. Sed *a c* & *a b* ſunt incommenſurabiles &c. Sunt verò etiam *a c* & *a m* commenſurabiles ſecunda potentia, nam cubus *a m* eſt duplus cubi *a c*.



37. Quæ dicta ſunt de numero plano facilè applicari poſſunt numeris ſolidis. *Numeri ſolidi* appellantur illi, qui proveniunt ex multiplicatione numeri plani per quemcunque numerum : Ex. gr. 18. eſt numerus ſolidus ortus ex 6. (qui eſt numerus planus) multiplicato per 3. vel ex 9. multiplicato per 2.

38. Numeri *ſolidi ſimiles* ſunt illi, quorum parvi cubi ita diſponi poſſunt, ut conſtituant parallelopipeda rectangula ſimilia.

39. Numeri *cubici* ſunt illi qui diſponi poſſunt in formam cuborum, ut 8. vel 27. quorum latera ſunt 2. & 3. *baſes* verò 4. & 9.

40. Omnis numerus cubicus multiplicans alium numerum cubicum, producit tertium nnmerum cubicum.

41. Inter duos numeros ſolidos ſimiles, incidunt duo numeri medii proportionales. *Saltem applicari debent ſolidis, quæ jam demonſtrata ſunt in ordine ad plana.*

42. Hæ demonſtrationes quibus probatur dari lineas & magnitudines

nes incommenſurabiles, probant etiam *continuum* non eſſe compoſitum ex punctis finitis: nam ſi diameter æquè ac latus quadrati eſſent compoſita ex punctis finitis, punctum metiretur latus & diametrum: Nam punctum inveniretur certis aliquot vicibus in latere & certis quoque vicibus in diametro; quod eſt impoſſibile (per demonſtrationes præcedentes.)

43. Quia in triangulo rectangulo quadratum lateris maximi eſt æquale duobus quadratis reliquorum laterum, (6.61.) Semper adhibitum fuit illud triangulum ad inveniendas incommenſurabiles: nam ſi omnia tria latera ſunt commenſurabilia, poterunt omnia tria exprimi tribus numeris, & tunc quadratum maximi numeri erit æquale quadratis duorum reliquorum numerorum; ut ſi maximum latus eſt 5. pedum, minimum 3. mediocre 4; quadratum ex 5. erit 25. & reliqua quadrata erunt 9. & 16. & hæc duo ſimul ſumta 9. & 16. conſtituunt tertium 25. Sed ſi latus minimum eſt 2. mediocre 3. maximum

mum latus non poterit exprimi per numeros, quia quadratum minoris lateris 4. additum quadrato mediocris 9. facit 13. qui exprimit quadratum lateris maximi: Sed ut hic numerus 13. non eſt numerus quadratus, ſic etiam non poteſt habere latus ſive radicem per aliquem numerum expreſſam.

44. Omni tempore ſolliciti fuerunt veteres in indiganda aliqua methodo ad inveniendos diverſos numeros qui exprimerent tria latera trianguli rectanguli, ut ſecuri eſſe poſſimus hæc tria latera eſſe commenſurabilia. En methodum, qua inveniri poſſunt omnes numeri poſſibiles huic ſcopo convenientes.

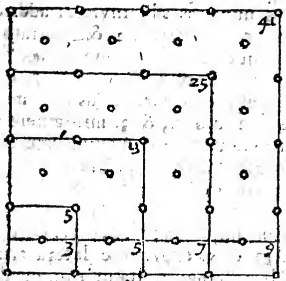
45. Si ſumantur duo numeri quicunque, (etiam ipſa unitas) quorum differentia ſaltem eſt unitas & conjungantur duo quadrata horum duorum numerorum; reſultabit numerus qui erit radix quadrati æqualis duobus quadratis; Et hic numerus exprimit latus maximum trianguli rectanguli, latus mediocre exprimetur numero unitate ſaltem minori;

ri; & latus minimum per duos primos numeros ſibi invicem additos. Ex. gr. ſumtis 1. & 2. & quadrato utriuſque 1. & 4. conjungo hæc duo quadrata 1. & 4. & produco 5. dico 5. poſſit exprimere latus maximum, & 4. mediocre, & 3. minimum: ita ut 25. quadratum maximi lateris ſit æquale 16. & 9. quadratis reliquorum duorum laterum. Similiter ſi ſumo 2. & 3. eorumque quadrata 4. & 9. conjungo, produco 13. Dico 13. & 12. & 5. exprimere latera trianguli rectanguli, ita ut 169. quadratum de 13. æquale ſit 144. & 25. quadratis ex 12. & 5. Similiter ſumtis 3. & 4. eorumque quadratis 9. & 16. additis producuntur 25. Dico 25. eſſe maximum latus trianguli, 24. latus mediocre & 7. minimum.

Hæc omnia facilius inveniantur hac ratione.

46. Si diſponantur unitates decuſſatim, omnes numeri conſtituentes figuram quadratam erunt numeri convenientes ad exprimendum latus maximum. Latus mininum erit numerus comprehenſus in duobus pri-

oribus ordinibus figuræ quadratæ, &



latus mediocre erit unitate minus latere maximo.

47. Si hæc figura continuata fuerit, dabit omnes numeros poſſibiles: Sed notari debet æquè multiplices trium numerorum inventorum idem præſtare; ut inventis 5. 4. & 3. eorum dupli 10. & 8. & 6. exhibebunt tria latera trianguli, ita ut 100. quadratum ex 10. ſit æquale 64. & 36. quadratis ex 8. & 6. Similiter eorum tripli 15. 12. 9. idem ſaciunt: Quivis enim videt omnes hos numeros ſemper eandem ſervantes proportionem

nem non niſi unum triangulum exprimere nimirum illud quod exprimitur per 5.4.& 3.& ſic omnes hi numeri debent haberi pro iiſdem.

LIBER OCTAVUS.

De Progreſſionibus & Logarithmis.

1. PRogreſſio eſt ſeries quantitatum, quæ inter ſe invicem ſimilem aliquam habitudinem habent,& quælibet harum quantitatem appellatur *terminus.*

2. Quando termini ſe mutuo inſequentes æqualiter creſcunt vel decreſcunt; Progreſſio appellatur *Arithmetica*, ut ſunt numeri naturali ſerie procedentes 1. 2. 3. 4. 5. &c. vel etiam numeri impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. vel etiam ut 4. 8. 12. 16. vel etiam 20. 15. 10. 5. 0.

3. Progreſſio arithmetica poteſt augeri in infinitum ſed non diminui.

4. Si in progreſſione arithmetica

ſumantur quatuor termini, quorum duo priores à ſe invicem tantum diſtant, quantum duo poſteriores; Hi quatuor termini dicuntur proportionales in proportione arithmetica, ut in progreſſione numerorum naturalium 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. &c. Si ſumamus 2. 3 ::: 9. 10. (hæc nota ::: inpoſterum indicabit proportionem arithmeticam) erit eadem proportio arithmetica inter 2. 3. quæ eſt inter 9. & 10. id eſt, 10. excedere 9. tantum, quantum 3. excedit 2. Similiter 3. 5 ::: 8. 10. ſunt in proportione arithmetica. Sicut etiam 1. 5 ::: 5. 9. ubi 5. bis repetitur & eſt medium arithmeticum inter 1. 9.

5. In proportione arithmetica aggregatum duorum extremorum eſt æquale aggregato duorum mediorum, ut in 2. 3 ::: 9. 10. aggregatum ex 2. & 10. eſt 12. & aggregatum ex 3. & 9. etiam eſt 12. Similiter in 3. 5 ::: 8. 10. aggregatum ex 3. 10. eſt 13. & aggregatum ex 5. & 8. quoque eſt 13. Ratio hujus ex ſe ſatis manifeſta eſt, nam ſi 10. excedit 8. etiam id quod additur 8. nimirum 5. excedit

cedit tantùm illud quod additur 10. nimirum 3. & ſic oritur æqualitas.

6. Aggregatum ſive ſumma primi & ultimi termini eſt æqualis ſummæ ſecundi & penultimi, vel tertii antepenultimi &c. ut in primo exemplo 1. & 9. faciunt 10. & ſimiliter 2. & 8. vel etiam 3. & 7. vel 4. & 6. ſemper ſunt 10. & in medio reſtat 5. qui bis ſumtus (tanquam reſpondens duobus, quia æqualiter diſtat à primo & ultimo) etiam efficit 10.

7. Si addatur primus terminus ultimo & multiplicetur illorũ ſumma per ſemiſſem numeri terminorum, productum erit æquale aggregato omnium terminorum ſimul ſumtorum, ut hic ſi 1. addatur 9. ut oriantur 10. & multiplicentur per 4. & $\frac{1}{2}$ (ſunt enim 9. termini) fient 45. qui ſunt ſumma omnium terminorum ab 1. uſque ad 9. Hoc manifeſtum eſt per præcentem.

8. Quando termini progreſſionis ſunt continuo proportionales; id eſt, ſi 1. eſt ad 2. ut idem eſt ad 3. & ut 4. ad 5. &c. Tunc progreſſio appel-

 latur

latur *Geometrica*, ut 1. 2 4. 8. 16. 32. vel etiam 1. 3. 9. 27. 81. vel etiam 3. 12. 48. 192. 768. vel 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, &c.

9. Progreſſio Geometrica poteſt augeri & diminui in infinitum.

10. Quando progreſſio incipit ab 1. ſecundus terminus appellatur *radix vel latus:* tertius appellatur *quadratum* vel ſecundus gradus: quartus, *cubus* vel tertius gradus: quintus *quadrati quadratū* vel quartus gradus, ſextus *ſurſolidus* vel quintus gradus, ſeptimus *quadrati cubus* &c.

11. Si ſumantur quattuor termini, quorum duo priores tantùm diſtant à ſe invicem in progreſſione, quantum duo poſteriores, erunt ſimpliceter proportionales, & productum extremorum erit æquale producto mediorum (6. 28.)

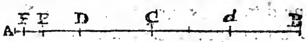
12. Sit Quantitas *AB* diviſa in



C, in *D*, in *E*, in *F*, &c. ita ut *AB*. *AC*

AC :: *AC. AD* :: *AD. AE*, &c. Dico *BC. CD. DE. EF.* &c. eſſe in progreſſione Geometricâ continuè proportionales, & *AB. AC* :: *BC. CD* :: *CD. DE.* &c. nam quia *AB. AC* :: *AC. AD* erit *dividendo AB* minus *AC.* (id eſt, *CB.*) *AC* :: *AC.* minus *AD*, (id eſt, *DC.*) *AD.* & per conſequens *alternando CB. DC* :: *AC. AD* vel :: *AB. AC.* Sic de omnibus aliis probabitur :: *DC. ED. FE.* &c.

13. Sit progreſſio quantitatum in linea recta BC, CD, DE, EF, &c. Et ſit ſumta C *d* æqualis termino ſecundo CD, ut habeamus *d*B, differentiam primi & ſecundi termini, & fiat ut B*d* ad BC :: ſic BC ad aliquã quartam lineam, nimirum BA. Dico



ſi numerus terminorum BC, CD, DE &c. ſit finitus, licet quam maximus ſit, omnes hos terminos ſimul ſumtos, etiamſi illorum ſint centum mille milliones, fore minores BA. Si quis ſupponeret eſſe hos terminos in-

infinitos in multitudine; tunc hi termini ſimul ſumti eſſent præciſè æquales B A: Nam quia per hypotheſin B *d*. (id eſt, B C minus C *d*. vel C D) eſt ad B C :: ut B C (i. e. A B minus A C) eſt ad A B; Facilè patebit ut B C. C D :: A B. A C :: A C. A D &c. & per conſequens omnes termini C D, D E, E F &c. erunt adhuc intra punctum A, ad quod eò magis appropinquabitur quo magis augebitur numerus terminorum; Et ſic quidem videmus omnes hos terminos, (qui in ſchola appellantur *partes proportionales*) ſi actu infiniti eſſent, non facere longitudinem infinitam, quoniam ſunt incluſi in B A.

14 Hæc demonſtratio facilior redditur in exemplo progreſſionis particularis, cujus termini ſunt in ratione dupla, ex. gr. B C. dupla C D. & C D. dupla D E. &c. nam ſi numerus terminorum eſt finitus, etiamſi illorum eſſent centum milliones, & ſumatur terminus ultimus & minimus, ex. gr. F E, eique adjungatur alia quantitas ipſi æqualis, ſcil. F A; manifeſtum eſt E A eſſe æquale penul-

ultimo termino E D: nam penultimus E D eſt duplus ultimi F E, per hypotheſin. Sed E A etiam eſt duplus F E, quia ponimus F A æquale E F. Similiter A E cum D E, id eſt, A D. erit æquale ſequenti termino C D: & tandem A C erit æquale B C. Ita ut exindè videre liceat primum & maximum terminum ſemper æqualem eſſe omnibus reliquis ſimul ſumtis, modo addatur quantitas æqualis ultimo & minimo termino: Verum ſi nihil addatur, primus ſemper erit major omnibus reliquis ſimul ſumtis. Si quis ſupponat hos terminos eſſe actu infinitos, tunc maximus BC erit præciſè æqualis omnibus reliquis infinitis ſimul ſumtis, C D, D E, E F &c,



nam quivis facile videt quo plures adjiciuntur termini eò magis appropinquari verſus A, dum ſemper medietas quæ reſtat diminuitur. Sed quando continua quantitas diminuitur medietate, & reſiduum iterum medietate & ſic porrò, manifeſtum eſt,

ſi ſupponatur actu infinities meditate fuiſſe diminutam, nihil tandem reſtare. Hocetiam demonſtrari poteſt per deductionem ad impoſſibile monſtrando omnes hos terminos infinitos ſimul ſumtos, [redacted] neque eſſe majores neque minores A B.

15. Exinde reſolvi poſſunt difficultates quæ in ſcholis moventur contra diviſibilitatem continui, & à Geometriæ ignaris pro inſolubilibus habentur, cū tamen in rei veritate nihil ſint quā meri paralogiſmi.

16. Si ponantur duæ progreſſiones, altera Geometrica incipieno *a b* 1. & altera Arithmetica incipiendo *a b* 0. ita ut termini unius reſpondeant è regione terminis alterius, tunc termini arithmeticæ appellantur *Logarithmi*, & *exponentes*, ut

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64 128. 256.

17. Quod in progreſſione Geometrica, peragitur per multiplicationem & diviſionem, id in Logarithmis abſolvitur per additionem & ſubtractionem: ut ſi eſſent tres numeri 2. & 8 :: 64. & deſideraretur quar-

quartus numerus proportionalis in progreſſione Geometrica, neceſſum erit multiplicare 8. per 64. (utpote qui ſunt duo termini medii) nam productum 512 erit æquale (6.28.) producto ex 2. & alio quarto numero, tanquam extremis quatuor proportionalium: ad inveniendum vero quartum hunc numerum, duntaxat neneceſſe eſt dividere 512. per 2. & prodibunt 256. eritque tota ratio 2. 8 :: 64. 256. ita ut 64. & 256. tantum à ſe invicem diſtent in ordine progreſſionis, quantum 2. & 8. (8. 11.) ſed ſi loco numerorū Geometricorum 2. 8 :: 64 ſumti fuerint Logarithmi ipſis reſpondentes, nimirum 1. 3 :: 6. & quis vellet quærere Logarithmum quartum, debuiſſet addere 3. & 6. ut prodeant 9. & ſubtrahere 1. de 9. ut prodeant 8. qui eſſet Logarithmus numero Geometrico 256. reſpondens.

18. Similiter ſi ſumantur duo numeri Geometrici 4. & 8. quibus reſpondent Logarithmi 2. & 3. multiplicatis 4. per 8. prodibunt 32. qui reſpondent Logarithmo 5. qui ex additione 2. & 3. oritur.

19. Si

19. Similiter ſi ſumantur 16. & multiplicentur per ſeipſos, reſultabunt 256. qui reſpondebunt Logarithmo 8. qui exinde oritur ſi 4. ſibi ipſi addatur.

20. Si quis deſideraret numerum GeometricumLogarithmo16.reſpondentem deberet ſumere 256 qui reſpondet 8. & illos in ſe multiplicare, & prodibunt 65536.

21. Si quis etiam deſideraret numerum Geometricum, qui reſponderet Logarithmo 23. debet ſumere duos Logarithmos, qui ſimul ſumti conſtituant 23. ut 7. & 16. & inter ſe multiplicare numeros Geometricos ipſis reſpondentes, nimirum 128 (ſub 7.) per 65536 (qui eſſent ſub 16.)& productum erit 8388608 quod reſponderet 23 Logarithmo, id eſt, quod vigeſimum quartum locum, poſt numerum primum 1. habere debet.

22. Exinde videre eſt qua ratione facile quis reſpondere poſſit quæſtioni quæ ordinariè proponitur, quanti væniret equus, ſi hac conditione emeretur, ut pro primo clavo ſolvatur

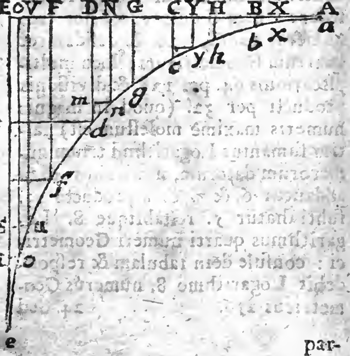
tur teruncius & pro ſecundo clavo duo teruncii pro tertio quatuor, pro quarto octo, & ſic uſque ad vigeſimum quartum: Nam vigeſimus quartus conſtabit 8388608 teruncijs, id eſt, 69905 libris 8. teruncijs, & duplicata hac ſumma (juxta 8. 14.) prodibit totum equum conſtare 139 810. libris.

23. Si quis haberet in magnis tabulis alicujus libri duas progreſſiones longas jam abſolutas, ubi Geometrica Arithmeticæ reſponderet; poſſet quis in numeris Geometricis inveniendis calculandi labore ſuperſedere: nam ſi quis daret hos tres numeros 32. 64. 128. & deſideraret quartum Geometricum; loco multiplicationis 64. per 128. & diviſionis producti per 32. (quod in magnis numeris maximè moleſtum eſt) ſaltim ſumantur Logarithmi trium numerorum datorum, nimirum 5. 6. 7. addantur 6. & 7. & à producto 13. ſubtrahatur 5. reſtabitque 8. Logarithmus quarti numeri Geometrici: conſule dein tabulam & reſpondebit Logarithmo 8. numerus Geometricus 256.

24. Sed

24. Sed quoniam in tali progreſſione Geometrica omnes numeri non occurrunt, hoc invenerunt medium conſtitueruntque duas progreſſiones, quarum altera, quæ continet omnes numeros 1. 2. 3. 4. 5. &c. & videtur eſſe progreſſio Arithmetica, nihilominus proprietates habet Geometricæ; & altera quæ continet numeros apparenter maximè irregulares, nihilominus eſt progreſſio arithmetica. Ecce lineam quæ perfectè continet omnia hæc myſteria.

25. Sit linea recta AE diviſa in



par-

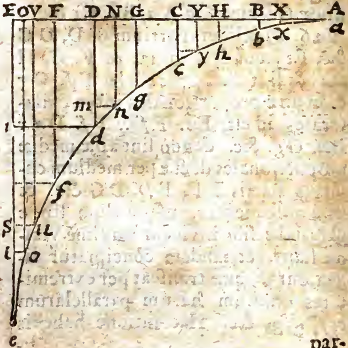
partes æquales A B, B C, C D, D E, &c. Per puncta A, B, C, &c. concipiantur lineæ rectæ A *a*, B *b*, C *c* parallelæ inter ſe, ſintq; in progreſſione Geometrica: Exempli gratia, ſi A *a* fuerit 1. B *b* 10. ſit C *c* 100. D *d* 1000. E *e*, 10000 &c. habebimus duas linearum progreſſiones, alteram Arithmeticam, alteram Geometricam: Nam lineæ A B, A C, A D, AE erunt in progreſſione Arithmetica, ut 1. 2. 3. 4. & ſic repræſentabunt Logarithmos, quibus reſpondebunt lineæ Geometricæ A *a*, B *b*, C *c* &c.

26. Quælibet partium E D, D C &c. ſit æqualiter diviſa in F, G, H &c. & ſint ductæ parallelæ F *f*, G *g* & mediæ proportionales inter collaterales, id eſt, E *e*. F *f* :: F *f*. D *d*:: D *d*. G *g*. &c. denuò ſint aliæ mediæ proportionales ductæ per medium cujuſvis partis E F, F D, D G &c. & ſic conſequenter, uſque dum lineæ parallelæ ſibi invicem maximè vicinæ fiant, & tandem concipiatur linea curva, quæ tranſeat per extremitates omnium harum parallelarum *e*, *f*, *d*, *g*, &c. Hac ratione habebis li-

lineam, cujus proprietates ſunt notatu digniſſimæ, & uſus maximi, prout ſuo loco patebit.

27. Si hæc figura accurata cum diligentia in tabula quadam magna deſcriberetur, tunc poſſet quælibet pars AB, BC, CD, &c. non tantum in 100. vel 1, 000, ſed in 10, 000. vel 100, 000. vel plures dividi. Ita ut ſi AB fuerit 100, 000. AC eſſet 200, 000. & AD 300. 000, &c. ſecundũ progreſſionem Arithmeticã.

28. Suppoſitâ lineâ Ee 10, 000



par-

partium, concipimus per quamvis partem lineas parallelas cum A E, quæ curvam in totidem punctis ſecent. Exempli gratia, ſit linea parallela 10. ducta per partem 9. 900. totius E *e*, quæ ſecet curvam in *o*. Sit etiam alia parallela *o* O, ſecans lineam A E in puncto O in parte 399, 563, exinde quis poterit cognoſcere 399, 563. eſſe Logarithmum numeri 9, 900. Similiter ſi *S u* tranſiret per partem 9, 000 lineæ E *e*, & *u* V ſecaret lineam A E in 395, 424. tunc eſſet hic numerus Logarithmus numeri 9. 000 &c.

29. Hac ratione poſſet quis conficere tabulam Logarithmorum ab 1. uſque ad 10, 000, & ulterius, ſi quis voluerit producere lineam A E.

30. Nota, ut habeas omnes Logarithmos ab 1. uſque ad 10,000. ſufficit quærere Logarithmos poſt 1,000, uſque ad 10, 000. id eſt, (ducta linea parallela *d t*) ſumendo Logarithmos omnium partium poſt *t* uſque ad *e*, quarum Logarithmi continentur inter E & D: nam per hoc habebis Logarithmos omnium aliarum partium,

quæ

quæ ſunt poſt *t* ad E, & quarum Logarithmi ſunt inter D & A. Exempli gratia, cum O *o* ſit 9, 900. partium & ejus Logarithmus 399, 563, idem numerus aſſumi poterit pro Logarithmo numeri *n* N 990. & numeri Y *y* 99. mutando duntaxat cifram primam 3. quia ſecundum compoſitionem hujus lineæ, O N, vel N Y, æquales eſſe debent ED vel DC, quod quivis facile demonſtrabit. Sic O N, vel N Y continebunt 100, 000, & quia A O eſt 399, 563. ablatis O N 100, 000, reſtabunt 299, 563. pro A Y, à quibus ſi iterum auferantur 100, 000. reſtabunt 199, 563 pro A Y; & eadem ratione cum A V habeat 395, 424. pro logarithmo numeri V *u* 9, 000. etiam habebis 095, 424. pro logarithmo X *x* 9, vel 195, 424. pro logarithmo numeri 90. vel 295, 424. pro logarithmo numeri 900.

31. Ut hac omnia etiam ad praxin deducantur per calculum, non neceſſe eſt ullam talium figurarum delineationem inſtituere, ſed ſaltim delineatas concipere: nam ope arithme-

meticæ poſſum invenire numerum medium proportionalem F *f* inter duos O *d* & E *e*, & poſtea etiam medios inter D *d* & F *f*, vel inter F *f* & E *e* &c. Sed ea quæ explicavimus ſufficiunt, ut habeamus cognitionem, quantum quidem nobis neceſſe eſt, naturæ & artificii logarithmorum : nam opus non eſt, ut ipſi calculi laborem ſubeamus & tabulam logarithmorum condamus, quia jam peractus eſt hic labor. Deus enim, boni publici cauſa, homines quoſdam excitavit, quibus magnam largitus fuit patientiam, ut ſuperare potuerint moleſtias laborum, qui videri poterant intolerabiles. Scimus quippe ultra viginti viros, ſtipendio ad id conductos per viginti annos & quod excedit in calculando aſſiduitate plane improba deſudaſſe.

32. Præter has duas progreſſiones datur & tertia, quæ appellatur *Harmonica*, quando ſumtis tribus terminis, qui ſe immediatè conſequantur, obſervare licet, quod maximus ad minimum ſit ut differentia inter maximum & medium, ad differentiam inter

inter medium & minimum, ut 30. 20. 15. 5. &c. ſunt in progreſſione harmonica; nam ſumtis 30. 20. 15. differentia inter 30. & 20. eſt 10. & differentia inter 20. & 15. eſt 5. ſed 10. 5 :: 30. 15.

33. Hæc progreſſio poteſt diminui in infinitum, ſed non augeri.

Ea quæ jam dicta ſunt de hac progreſſione magnum uſum non præſtant, neque etiam plane extraordinariis proferendis nunc incumbo.

In continuatione hujus Geometriæ obſervabuntur quædam proprietates hujus progreſſionis notatu digniſſimæ, quæ aliquam lucem adferre poterunt illis, quæ habemus de muſica veterum, cujus obſcuritas nondum detecta eſt. Ibi demonſtrabitur reſpectus ſeu habitudo, quam hyperbole habet ad hanc progreſſionem; nam quemadmodum angulus rectilineus inſervit inveniendis inter duas datas tot mediis, quot quis voluerit habere in ratione arithmetica; & ut linea illa curva, quam deſcripſimus in uſum logarithmorum, etiam inſervit

vit inveniendis inter duas datas tot mediis, quot quis deſideraverit in ratione Geometrica; Sic notare licebit hyperbolen inſervire inveniendis inter duas datas tot mediis, quot quis voluerit in ratione harmonica.

34. Datur quoque progreſſio quadratorum, & cuborum, quadrati quadratorum, ſurſolidorum, quadrati cuborum &c. ut 1. 4. 9. 16. 25. 36. &c. quia omnes ſunt numeri quadrati, quorum radices ſunt numeri naturales 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. Similiter 1. 8. 27. 64. 125. 216. ſunt cubi eorundem numerorum. Similiter 1. 16. 81. 256. 625. 1296. ſunt quadrati quadrata eorundem numerorum.

35. In progreſſione quadratorum poſita o pro primo termino, ſic o 1. 4 9. 16. &c. ſumma omnium terminorum eſt major tertiâ parte ultimi termini multiplicati per numerum terminorum; & hic exceſſus qui eſt ultra tertiam, ſemper tanto minor eſt, quo major eſt numerus terminorum. Similiter in progreſſi-

greſſione cuborum, hæc ſumma terminorum major eſt quarta parte; & in quadrati quadratis, illa eſt major quinta parte, & ſic conſequenter in reliquis. Hoc ut probemus, ſufficit ſaltim facere inductionem, prout videre eſt in hac tabula, ubi ſecunda columna continet progreſſi-

1	0	0	0	
2	1	1	2	$\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
3	4	5	12	$\frac{5}{12}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$
4	9	14	36	$\frac{7}{18}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$
5	16	30	80	$\frac{9}{24}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$
6	25	55	150	$\frac{11}{30}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{30}$
7	36	91	252	$\frac{13}{36}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}$

onem

onem quadratorum poſt o. Tertia columna complectitur ſummas terminorum. Exempli gratia, ibi videre licet ſummam poſt o. uſque ad 9. eſſe 14. Quarta columna continet productum cujuſque termini multiplicati per numerum terminorum qui ſunt poſt o. uſque ad ipſum; numerus ille notatus eſt in prima columna, ut 36. eſt productum ex 9. multiplicato per 4. Quinta columna comprehendit fractiones, quæ exhibent proportionem numerorum tertiæ & quartæ columnæ, ut è regione 14. & 36. ponitur $\frac{7}{18}$, qua fractione hoc volumus 14. eſſe ad 36. ut 7. eſt ad 18. & ſic etiam eſſe ſummam terminorum 14, ad productum ex 9. multiplicato per 4. nim. ad 36. ut 7. ad 18. Ulterius, in eadem columna quinta, poſt $\frac{7}{18}$ obſervantur & hi characteres (vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$); quibus hoc volumus $\frac{7}{18}$ tantum valere, quantum una ter-

tia

tia una cum una decima octava parte, quia revera $\frac{7}{18}$ tantum valent quantum $\frac{6}{18}$ una cum $\frac{1}{18}$, id eſt, $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$ ita ut ſumma 14. ſit tertia pars ex producto 36. & præter illam adhuc una decima octava pars ex 36. Similiter,

1	0	0	0	
2	1	1	2	$\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
3	4	5	12	$\frac{5}{12}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$
4	9	14	36	$\frac{7}{18}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$
5	16	30	80	$\frac{9}{24}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$
6	25	55	150	$\frac{11}{30}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{30}$
7	36	91	252	$\frac{13}{36}$ vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}$

repe-

reperio 30. tanquam ſummam terminorum uſque ad 16. eſſe majorem tertia parte ex 80. tanquam producto ex 16. per 5. & exceſſum eſſe $\frac{1}{24}$: nam $\frac{30}{80}$ tantum valent quantum $\frac{3}{8}$, vel quantum $\frac{9}{24}$ vel quantum $\frac{8}{24} + \frac{1}{24}$ vel tandem quantum $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$. Sed $\frac{1}{24}$ tantum non eſt quantum $\frac{1}{18}$; ſic igitur in continuatione hujus tabulæ obſerre licet, hos exceſſus, qui ſunt ultra tertiam partem, ſemper diminui, prout numerus terminorum creſcit: nam hi exceſſus ſunt $\frac{1}{24}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{36}\ \frac{1}{42}\ \frac{1}{48}$, &c. dum denominator fractionis interea ſemper augetur numero ſenario.

36. Si quis conſtitueret ſimilem tabulam cuborum, tunc videre erit fractiones, quæ erunt ultra partem quartam, ſemper valore diminui, dum interea illarum denominator

 au-

augetur quaternario, quoties novus terminus in progreſſione additus fuerit ; & ſimiliter in reliquis progreſſionibus per ſimiles tabulas id obſervare dabitur, quod generaliter in propoſitione præcedente dictum fuit.

Omnia hæc erunt maxime utilia in continuatione hujus Geometriæ, ubi etiam plures aliæ progreſſiones occurrent.

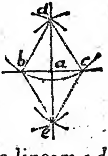
LIBER

LIBER ULTIMUS.

Problemata vel Geometria Practica.

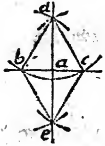
1. PRoblema appellatur in Geometria propoſitio, quæ docet aliquid conſtituere ac praxin demonſtrat, contra ac *Theoremata*, quæ ſunt propoſitiones ſpeculativæ, in quibus conſiderantur paſſiones ſeu proprietates rerum jam factarum.

2. *Ex puncto dato* a *quod eſt in linea* b a c *perpendicularem erigere*. Abſcinde circino utrinque partes æquales *a c* & *a b*: parum refert ſive hæ partes magnæ ſint ſeu parvæ, modo fuerint æquales. Aperi paulo plus crura circini, & ex punctis *b* & *a* tanquam centris, duos deſcribe arcus ſimiles, ſe mutuo in puncto *d* interſecantes. Poſtea adplicata regula ad puncta *a* & *d*, duc lineam *a d*

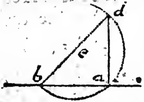


quæ erit perpendicularis deſiderata (2. 16.)

3. *Ex puncto dato* d *ducere perpendicularem verſus lineam* b a c. Ex centro *d* deſcribe arcum circuli, qui ſecet lineam in duobus locis *b* & *c*: dein ex hiſce duobus punctis *b* & *c* eadem circini apertura, deſcribe duos parvos arcus, ſe mutuo interſecantes in *e*, & erit linea *d e* perpendicularis quæſita (2.16.)

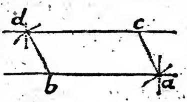


4. Quando puncta data *a* vel *d* ſunt ad extremitates chartæ vel ſuperficiei, in qua figura conſtitui debet, & non aſſumi poteſt diſtantia debita ultra punctum *a*, ſecundum praxes præcedentes; tunc hac ratione proceſſus erit inſtituendus. Si punctum *a* datum eſt in linea, aſſume extra lineam punctum, ubi libuerit verſus *e*, & ex eo tanquam centro deſcribe circulum, qui tranſeat per *a* & ſecet lineam in *b*: Dein ex *b* duc lineam *b e*, ſecabit circulum in *d*; recta *d a* du-



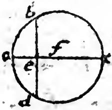
ducta erit perpendicularis ad *b a* (4. 14.) Si verò punctum *d* datum eſt extra lineam, duc lineam pro lubitu *d b*, & ex medio hujus lineæ deſcribe circulum *b a d*, qui ſecet *b a* in *a*; linea *d a* erit perpendicularis deſiderata. (4.14.)

5. *Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ, parallelam ducere.* Sit linea data *a b*, & punctum datum *c*, per quod ducenda ſit parallela : ex puncto *c* tanquam centro deſcribe arcum circuli, qui ſecet lineam datam in *a* : dein in eadem linea data accipe punctum *b* pro lubitu, quod tamen, quantum fieri poteſt, remotum ſit à puncto *a*, & ex hoc puncto *b* eadem circini apertura fac alium arcum circuli *d*: Accipe circino diſtantiam *a b*, & hac ipſa apertura, ex puncto *c* tanquam centro, deſcribe arcum qui ſecet alium in *d*; applicata regula ad duo puncta *c* & *d* habebis lineam *c d* parallelam lineæ *a b*; nam quadrilaterum *c a b d*, habet latera oppoſita æqualia per ipſam



ſam conſtructionem; & per conſequens eſt parallelogrammum, per converſam nonæ propoſitionis libri tertii..

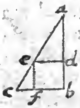
6. *Inter duas lineas datas* a e *&* e c *invenire mediam proportionalem.* Diſpoſitis lineis datis *a e* & *e c* in lineam rectam, ut conſtituant lineam totam



a c, quære in ea medium *f* & ex hoc puncto *f* deſcribe circulum *a b c*: erige perpendicularem *e b*, quæ ſecet circumferentiam circuli in puncto *b*, erit linea *a b* media proportionalis, ita ut *a e*. *e b* :: *e b*. *e c*. (6.66.)

7. *Conſtituere quadratum æquale rectangulo dato.* Accipe mediam proportionalem inter duo latera rectanguli, & quadratum ſuper hac media conſtitutum erit quæſitum (6.59.)

8. *Datis tribus lineis, invenire quartam proportionalem.* Sint lineæ datæ

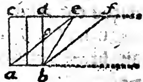


a d, *d e*, *a b*; conſtitutis *a d* & *a b* in unam rectam, & *d e* tranſverſim poſita, ut emergat triangulum *a d e*, produc latus *a e* verſus *c*,

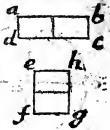
&

& ex puncto *b* duc parallelam *b c*, dico lineam *b c* eſſe quartam proportionalem deſideratam, & ut *a d*. *d e* :: *a b*. *b c*. (6.43.)

9. *Triangulo dato* a e b *æquale parallelogrammum rectangulum conſtituere.* Per ſumitatem *e* duc *e c* parallelam baſi *a b*, erit rectangulum *a b d c* duplum trianguli *a e b* : (3.18.) diviſa verò baſi *a b* in duas partes æquales, & erecta perpendiculari, orietur rectangulum æquale triangulo.



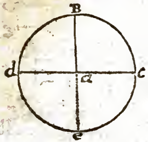
10. *Dato rectangulo, conſtituere aliud rectangulum æquale, quod habeat longitudinem datam.* Sit rectangulum datum *a b c*, cui conſtituendum ſit aliud æquale, quod pro latere habeat longitudinem *e f*. Hic habemus tres lineas, datas nimirum *a b*, *b c* (quæ ſunt latera rectanguli dati) & *e f*, quæ eſſe debet latus alterius rectanguli conſtituendi. Nunc igitur inquirenda eſt quarta linea, quæ ſit alterum latus hujus rectanguli. Datis his tribus li-



neis; quære ex illis quartam proportionalem (9.8.) quæ ſit *e h*, ita ut *e f. a b : : b c. e h*: dico rectangulum *f e h* fore deſideratum æquale rectangulo *a b c*. (6. 27.)

11. *Quodcunque polygonum in quadratum effingere.* Reſolve polygonum in triangula (3. 22. vel 24.) & conſtitue tot rectangula æqualia his triangulis, (9. 9) ita ut omnia hæc rectangula habeant eandem longitudinem: (9. 10.) conjunge omnia hæc rectangula, ut unum ex illis reſultet, & fac quadratum (9. 7.) æquale huic rectangulo, & habebis quod quæris.

12. *Dividere circulum in quatuor, in ſex, & omnes arcus in duas partes æquales.* Ut dividatur in quatuor partes, neceſſum eſt ducere duas perpendiculares per centrum, ut *d a c* & B *a e*. Si eum vis dividere in octo partes, divide quevis arcum B *c*, *c e* &c. in duas partes; quod fit, ſi ex punctis B & *c* duos arcus eadem circini apertura deſcripſeris:



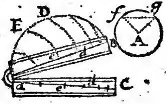
ſeris : nam ducta linea ex puncto interſectionis ad centrum *a*, dividet arcum B*c* in duas partes æquales : eodem modo procedes cum reliquis arcubus. Ut dividere poſſis circulum in ſex partes, accipe circino ſemidiametrum : nam ea nim. ſemidiameter ſexies circumferentiæ applicata, hanc perfecte metietur : ſic conſequenter dividi poteſt circulus in partes 12. & 24. & 48. &c.

13. *Dividere circulum in quinque, in quindecim & alias partes æquales.* Hoc fieri poteſt geometrice hac methodo, quam demonſtro in Algebra. Conſtitue triangulum rectangulum, cujus alterum crus ſit ſemidiameter circuli, & alterum ſemiſſis ſemidiametri. Ab hypothenuſa hujus trianguli aufer dimidium ſemidiametri, reſiduum erit chorda 36°. & latus Decagoni. Duplicato hoc arcu, prodibit arcus 72°. qui eſt quinta pars circuli; & chorda horum 72°. erit hypothenuſa trianguli rectanguli, cujus alterum crus eſt ſemidiameter, & alte-

rum decagoni latus. Sed quemadmodum per præcedentem docuimus invenire 60°. Sic etiam habebimus differentiam inter 36. & 60. nimirum 24°. quæ eſt decima quinta pars circuli. Sed in praxi breviſſima & certiſſima via eſt, circino iteratis vicibus aperturam quærere, quæ, ſi quinquies adplicata fuerit circumferentiæ, eam exacte metiatur: poſtea quælibet harum partium eodem modo dividatur in tres, quærendo per circinum & repetendo, ſi prima vice rem non tetigeris: & habebis circulum in quindecim partes diviſum. Si quælibet harum 15. partium etiam dividatur in quatuor, & quælibet harum quatuor in ſex, erit totus circulus in 360. gradus diviſus. Et hæc diviſio maximè commoda eſt ad praxin. Nota, quod nondum inventa ſit methodus dividendi geometrice arcum in tres partes æquales, neque in quinque, neque in ſeptem, neque in alias partes impares. Dico geometrice, nihil præter lineam rectam & circulum adhibendo.

Di-

Diviſio hæc circuli in 360. *gradus etiam maximè utilis eſt, ſi quis ſciverit uſum circini ceu inſtrumenti proportionum: eſt hoc genus aliquod circini, quod habet brachia lata* a B, a C, *in quibus notatæ ſunt diverſæ lineæ & diverſæ diviſiones, quarum illæ, quæ maximū*



uſum præſtant, reducuntur ad duas: nam in uno latere circini eſt quædam linea in quovis brachio a e B, *&* a e C, *quæ inſervit diviſioni totius circuli in* 360. *gr. una opera abſolvendæ, & ut pro lubitu gradus quoſcunque ſumere poſſim. Diviſio circini abſolvitur modo ſequente .....*

Inſtrumentum proportionum ſignare ſeu præparare, ut inſerviat diviſioni circuli. Concipe ſemicirculum *a* E D B, qui exacte diviſus ſit in 180°. ſi ex puncto *a* per ſingulos gradus ducerentur arcus, qui ſecarent lineam *a e* B; exempli gratia, ſi ex 60° *E* duceretur arcus E *e*, & ex 90° D arcus D *d* &c. notari deberet 60. in bra-

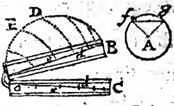
brachio inſtrumenti è regione *e*, & 90. è regione *d* &c. Si in altero brachio *a* C pariter proceſſeris, habebis hoc latus inſtrumenti diviſum, prout neceſſum eſt.

15. *Explicare uſum inſtrumenti proportionum, quatenus inſervit diviſioni circuli.* Sit datus circulus A *f*, accipe circino communi ſemidiametrum A *f*, dein adplicato altero pede hujus circini communis ad punctum *e*, id eſt, gradum 60. in uno brachio circini ceu inſtrumenti proportionum, tamdiu remove aut admove alterum brachium, uſque dum pes alter communis circini præciſè incidat in punctum *e* alterius brachii Inſtrumenti proportionum, ita ut diſtantia *e e* æqualis ſit ſemidiametro A *f*; Jam ſi ſtatim invenire volueris o

90. circuli dati, impone ſaltim duos pedes circini in duo puncta *d*, *d*, & transfer hanc diſtantiam in *fg*, & habebis arcum *fg* 90. graduum. Sic ſi volueris ſumere 35. gradus, ſaltim impone pedes circini communis in puncta lineæ *a* B, *a* C, in quibus ſunt

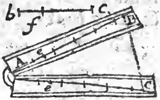
35.

35. gradus, & transfer hanc diſtantiam in circulū datum,& hac ratione procedere debes cum quovis alio gradu.



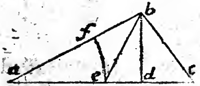
Omnia hæc fundantur in propoſitionibus 42. 43. 49. 50. libri ſexti: nam quemadmodum omnes circuli ſunt figuræ ſimiles, (6.50.) chorda *fg* erit ad ſemidiametrum A*f* ut chorda *a* D ad ſemidiametrum *e d*, id eſt, ut *a d* ad *a e*. Aliunde verò triangula *a d d* & *a e e* ſunt ſimilia, & ſic *d d*. *e e* :: *a d*. *a e*. Sed *d d* per conſtructionem æqualis eſt *fg* & *e e* lineæ A*f*: ergo *fg*. A*f* :: *a d*. *a e*.

16. *Signare ſ. præparare inſtrumentum proportionum, ut inſervire poſſit diviſioni linearum rectarum.* Ex centro circini ſint in brachiis ductæ duæ lineæ verſus B & C, quarum quælibet diviſa ſit in 100, vel 200. partes æquales, & ſic inſervient ad dividendam una opera lineam datam



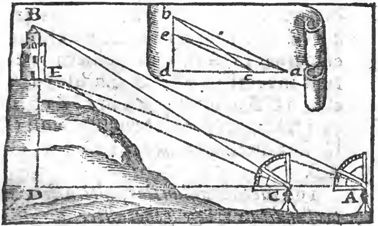
tam, in quotcunque partes volueris. Exempli gratia, ſit linea data *b c* & ab ea debeant ſumi $\frac{25}{97}$ id eſt, 25 nonageſimæ ſeptimæ partes; Hoc in caſu dividi deberet tota linea *b c* in 97 partes æquales, ut ex iis ſumi poſſent 25. quod prolixum eſſet; ſed ope circini proportionum id facile abſolvitur. Accipe circino communi longitudinem lineæ *b c*, & applicato uno pede nonageſimæ ſeptimæ parti B unius brachii inſtrumenti proportionum, admove vel remove alterum brachium tamdiu, uſque dum pes alter præciſe incidat in 97 partem C alterius brachii; dein transfer diſtantiam *e e* in *b f*, & *b f* erit exacte $\frac{25}{97}$ totius lineæ *b c*: id quod etiam fundatur in eo, quod triangula A B C & A *e c* ſunt ſimilia.

17. *Super datam lineam conſtituere angulum tot graduum, quot deſideraveris.* Sit linea data *a c*, ſuper qua conſtituendus detur



detur angulus 30 graduum. Ex pun-
cto *a*, tanquam centro, deſcribe cir-
culum *e f*, in quo ſume per circinum
proportionum, vel aliter 30. gradus
à *e* uſque ad *f*, & per hunc 30. gra-
dum ducatur linea *a f*, quæ cum li-
nea *a c* conſtituet angulum 30. gra-
duum.

18. *Cognitis angulis dati trianguli & uno latere, invenire reliqua latera.* Si tibi dicatur, eſſe alicubi triangu-
lum, cujus baſis A C ſit decem ulna-

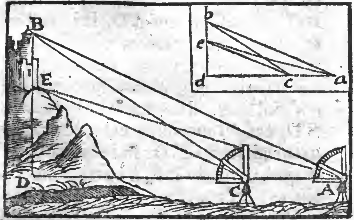


rum & angulus ad baſin, ut ACB ha-
beat 150. gr. & angulus C A B 20.
gr. (& per conſequens tertius angu-
lus ad verticem erit 10. quia omnes
tres anguli 150. 20. 10. ſimul ſumti
effi-

efficiunt 180. id eſt, duos rectos) & à te quæratur, quot ulnas habere debeat quodvis reliquorum duorum laterum A B, C B. Fac in charta vel potius in tenui chartaceo triangulū ſimile *a c b* ſequentem in modum: Accipe baſin pro lubitu *a c* 10. pollices longam, vel quaſcunque alias decem partes: ſuper *c a* deſcribe duos angulos, alterum *c a b* 20. grad. & alterum *a c b* 150. grad. (9.27.) & duæ lineæ *a b*, *c b* ſe mutuo interſecabunt in aliquo loco, nimirum in *b*. Metire igitur quot pollices ſint in *a b* vel *c b*: nam certus eſſe potes, tot eſſe ulnas in A B, quot pollices fuerunt inventi in *a b*; & ſimiliter tot eſſe in C B, quot fuerunt in *c b*: nam cum triangula propter angulos æquales ſint ſimilia, erit *a c*, ad *a b* :: A C. A B.

19. *Metiri diſtantias, altitudines, profunditates, & generaliter omnes magnitudines locorum diſſitorum & inacceſſibilium.* Si in vertice alicujus montis, qui eminus apparet, conſtituta ſit turris B E, & quis vellet obſervare illius diſtantiam & altitudinem,

nem, is deberet aliquo inſtrumento (ex. gr. quadrante, id eſt, quarta circuli parte, quæ diviſa ſit in 90. grad. & inſtructa regula quadam, circa centrum mobili, quam *dioptram* appellamus) hoc inquam inſtrumento ſumere deberet duos angulos in diverſis ſtationibus, ſequentem in modum. Si es in ſtatione A, ita conſtitue inſtrumentum, ut latus unum exacte reſpondeat lineæ horizontali A D, & hunc ſitum neque attollendo neque deprimendo muta: Applica oculum ad A, id eſt, centrum inſtrumenti & dirige regulam verſus verticem turris B tamdiu, donec illa cum tuo ra-



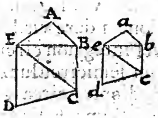
dio viſuali coincidat: tunc hæc regula

gula in circumferentia inſtrumenti notabit gradus anguli BAD: Eſt enim circumferentia inſtrumenti in gradus diviſa. Poſtea muta ſtationem, & progredere in loco plano ad 10. ulnas (vel pro lubitu in quavis alia diſtantia) uſque ad C, & ibi denuo cape alium angulum BCD, cujus ope habebis angulum deinceps BCA quia hi duo ſimul ſumti æquales ſunt duobus rectis: & ſic in triangulo ACB cognitam habes baſin, quam 10. ulnis longam ſumſiſti: præterea etiam cognitos habes duos angulos ad baſin; & per conſequens ex hiſce potes elicere latus CB vel latus AB. (9. 18.) Accipies etiam altitudinem BD, vel diſtantiam AD, ſi in parvo triangulo ſimili ducas ex puncto *b* perpendicularem *b d*; nam BD vel AD habebunt tot ulnas, quot *b d*, vel *a d* pollices. Si acquiſita altitudine BD, eadem methodo etiam inveſtigetur altitudo ED, habebis quoque magnitudinem EB à vertice ad baſin vel pedem turris.

Interdum loco acceſſus verſus turrim & obſervationum à vertice ad baſin,

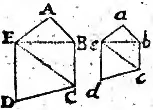
ſin, nec non angulorum, qui à radiis viſualibus & horizontali conſtituuntur; interdum inquam conducit ſumere duas ſtationes juxta ſe invicem; ſed ad idem recidit, & praxis revera non differt. Hoc modo, ut quivis videt, metiri poſſumus omnes magnitudines, quæ ſaltim concipi poſſunt, ſi modo extremitates duorum locorum diſſitorum obſervare licet. Nolo hic pluribus deſcribere praxes ſpeciales, neque ennarrare commoda ex perſpicillis & opticis tubis, qui dioptræ inſtrumenti applicari poſſunt commodo obſervantium inæſtimabili.

20. *Delineare planum alicujus loci.* Sit urbs vel alius locus A B C D E, & deſideretur à te illius planum delineari; Accipe omnes diſtantias laterum & linearum ex angulo in angulum ductarum, eaſque transfer in chartam ſecundū proportionem. Exempli gratia, inventa A B 30. ulnarum BC 59. CD 50. BE 67. AE 49. &c. & facta in charta aliqua ſcala,



la,

la, diviſa in 100 partes parvas, duc



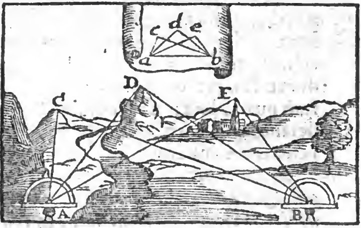
lineam *a b* 30 partium, *b e* 67. *a e* 49. hæ lineæ ſimul conjunctæ conſtituunt triangulum A B E, & ſi continuaveris efficere triangulum *b e c* ſimile B E C, &c. habebis figuram totam *a b c d e* ſimilem loco A B C D E.

21. Si non datur intrare locum, vel metiri diſtantias angulorum BE, E C, neceſſum eſt ſumere angulos loci, eoſque in figuram transferre, ita ut ſi angulus B A E fuerit 66. grad. etiam angulus *b a e* ſit 66. gr. & ſic de reliquis.

22. *Exhibere delineationem urbis vel regionis.* Aſcende in duo loca elevata A & B, è quibus conſpicere poſſis urbem vel regionem, cujus delineationem dare vis. Habeas quadrantem, vel integrum circulum vel etiam ſaltim ſemicirculum in gradus diviſum & dioptrâ circa centrum mobili inſtructum: colloca primo inſtrumentum ſuper A, ita ut unum latus reſpiciat ex A verſus B. inſtrumento

ſic

ſic collocato ac firmato, reſpice turres, ædes, montes & alia loca nota-



bilia ut E, D, C &c. atque omnes hos angulos accipe mediante dioptra, eoſque memoriæ ergo nota; angulus C A B, exempli gratia, eſt $50^{o}.\ 30^{I}.$ angulus D A B $45^{o}.\ 8^{I}.$ &c. Dein procede eodem modo ſuper B & nota angulum A B C eſſe $40^{o}.\ 10^{I}.$ & angulum A B D $47^{o}.\ 28^{I}.$ &c. Poſtea in charta aſſume pro lubitu *a b*, & deſcribe angulos æquales illis, quos inveniſti; *c a b* æqualem C A B, *d a b* æqualem D A B, *a b c* A B C &c. & ſic habebis puncta *c*, *d*, *e* &c. quæ erunt

runt in eadem à ſe invicem diſtantia ac turres vel alia loca notabilia C, D, E &c. Datis jam locis principalioribus reliqua facile delineari poſſunt. Ad inſtituendam verò operationem accuratiorem, maxime conducet ſumere etiam angulos tertii imò quarti loci; ut ſi omnia coinciderint, quis certus ſit, operationem bene fuiſſe inſtitutam.

23. *Cognitis duobus lateribus trianguli, & angulo ab illis lateribus comprehenſo, invenire tertium latus & reliquos duos angulos......*

24. *Cognitis duobus lateribus & angulo uni horum laterum oppoſito, invenire tertium latus & reliquos angulos......*

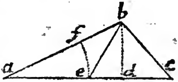
25. *Cognitis omnibus angulis & uno latere, invenire reliqua latera......*

26. *Cognitis tribus lateribus, invenire omnes angulos.* Hæc omnia exacte inveniuntur, ſi ſaltim in chartaceo conſtituuntur triangula ſimilia.

27. *Metiri* aream *(id eſt, magnitudinem ſive capacitatem interiorem) alicujus trianguli dati* a b c. Ex vertice *b* duc perpendicularem *b d* ad

baſin-

baſin *ac* productam, ſi neceſſe fuerit; divide *a c* in 10. (vel pro lubitu in quaſvis alias partes) & vide quot partes contineantur in *b d*: nam multiplicata ſemiſſi perpendiculi *b d* per 10. habebis aream trianguli, (3.18.) Ut ſi *b d* contineret 12. partes, quales ſunt decem in *a c*, tunc neceſſum eſſet multiplicare 6. per 10. ut oriantur 60. capacitas trianguli *a b c*, id eſt, triangulum hoc tantum ſpatii comprehendit, quantum 60. continebunt parva quadrata, quorū quodvis latus eſſet decima pars lineæ *a c*.



In praxi nulla datur methodus quæ facilior vel etiam exactior ſit, quam hæc ipſa, nihilominus in certis caſibus maxime conducit cognitio metiendi abſtractè, quæ tamen non habetur niſi mediante calculo. En igitur principia, ex quibus artificium calculandi eruitur.

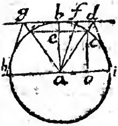
28. *Cognitis in triangulo rectangulo* a b d *duobus lateribus, invenire tertium latus per calculum.* Sit crus *b d* 3 ulnarum,

narum, & crus *ad* 4 ulnarum: multiplica 3 per 3 & 4 per 4 ut exinde oriantur duo quadrata, quæ in ſummam collecta æqualia erunt quadrato hypothenuſæ *ab*: (6. 61.) & per conſequens quadratum *ab* eſt 9. plus 16. id eſt 25. ut igitur mihi conſtet magnitudo *ab*, ſaltim ſumo latus vel radicem quadratam ex 25. quæ eſt 5. & exinde concludo *ab* eſſe 5 ulnarum. Si hypothenuſa *ab* 5. nota eſt cum uno latere *ad* 4. tunc ſubtrahi debet quadratum 16. à quadrato 25. & reſtabunt 9. quorum radix eſt 3. magnitudo alterius cruris *bd*. Interdum accidit, ut duo quadrata crurum in unam ſummam collecta, non conſtituant numerum quadratum, vel ut quadratum unius cruris ſubtractum à quadrato hypothenuſæ non relinquat numerum quadratum: ut ſi crura ſunt 2. & 3. quadrata erunt 4. & 9. quæ addita faciunt 13. Sed 13. non eſt numerus quadratus, & per conſequens non habet exactum radicem: ſed nihilominus dantur numeri, qui proxime accedunt, ut hic $3\frac{3}{5}$ eſt proxime radix ex 13. nam

$3\frac{3}{5}$ in ſe multiplicatis, faciunt 13. minus $\frac{1}{15}$. & ſic latus *ab* eſt $3\frac{3}{3}$ plano majus.

Hic non traditur methodus extrahendi radices quadratas, quia hæc eſt regula Arithmeticæ, de qua hic non agitur.

29. *Computare tangentem, ſecantem & ſinum* 30. *graduum.* Sit exempli gratia *b a* radius ſive ſinus totus, *a d* ſecans 30. grad. *b d* tangens, *c e* ſinus; Obſervatu facile eſt, *b d* eſſe ſemiſſim lineæ *a d*: nam ducta *ag* alia ſecante 30. grad. triangulum *g a d* erit æquilaterū: nam quivis angulorum *g*, *d*, & *g a d* rit 60. grad. cum igiur *b d* ſit ſemiſſis lineæ *g*, etiam erit ſemiſſis neæ *a d*: ob eandem



ationem *c e* erit ſemiſſis lineæ *a c*. Poſito igitur in triangulo rectangulo *a e c*, hypothenuſam *a c* eſſe 2. & crus *e c* 1. & ſublato quadrato 1. à quadrato 4. reſtabit 3. æquale quadra-

to lateris *a e*,quod æquale eſt *c o* (ſinui arcus *c* i. 60. graduum.) Sed ſi loco 2. & 1. pro *a c* & *c e* nos ſumamus 1, 000, 000 & 500, 000, quadratum ex *c s*, nimirùm 250, 000, 000, 000, ſubſtractum à quadrato 1, 000, 000, 000, 000, relinquet 750, 000,000, 000. cujus radix quàm proxime eſt 166, 025. pro *a e* vel *c o* ſinu 60. graduum.

30. *Cognito* c e *ſinu anguli cujuſcunque, invenire* c o *ſinum complementi hujus anguli.* Complementum anguli, eſt illud quod ad 90. grad. deeſt. Exempli gratia, ſi angulus *c a b* haberet 30. grad. complementum illius erit 60. grad. nam 60. una cum 30. efficiunt 90. grad. Propoſitio hæc demonſtrata eſt in præcedente.

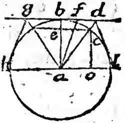
31. *Cognito* e c *ſinu anguli, & ſinu complementi, nimirum* c o *vel* a e ; *invenire tangentem* b d, *& ſecantem* a d. Quia triangula *a e c* & *a b d* ſunt ſimilia, tunc ſequitur *a e. c e :: a b. b d.* & *a e. a c :: a b. a d*: & ſic per regulam trium in arithmetica, poſito arcum *c b* eſſe 30. grad. elicitur tangentem *b d* eſſe 577, 350. & ſecantem *a d* 1, 154, 700. 3

32. *Cognitis ſinu, tangente & ſecante alicujus arcus* b c; *invenire ſinum, tangentem & ſecantem medietatis arcus.* Ducta *a f* per medium arcus *b c*, erit *d f. f b :: a d. a b* (6. 72.) & per conſequens dabitur tangens *b f* 15. grad. ut & ſinus & ſecans eorundem 15. grad. Porro etiam denuo biſariam diviſo arcu *b f*, dabitur ſi-

o I

nus, tangens & ſecans 7. & 30. & poſtea 3. grad. 45. min. & ſic in infinitum.

33. *Invenire ſinum* c e 45. *grad.* Eſt hic ſinus æqualis ſinui complementi eorundem 45. grad. nimirum *e a* & per conſequens invenitur etiam tangens & ſecans



o I

45. grad. ut & medietas 22. 30. & 11. 15. &c.

34. *Invenire ſinum* 36. *grad.* Poſtquam circulo inſcripſiſti pentagonum regulare, habebis proportionem lateris hujus pentagoni ad radium. (9. 13.) Sed latus hoc eſt chorda 72.

grad. & ſemiſſis hujus chordæ eſt ſinus medietatis 72. grad. ~~min.~~ 36. Hac ratione cognitus eſt ſinus 36. grad. & per conſequens etiam tan-
o o
gens & ſecans ut & ſemiſſes 18. 9,
o I o I
4. 30., 2. 15. &c.

35. *Invenire ſinum, tangentem & ſecantem* 12. *grad. & medietatum*
o o o I I
6., 3, 1. 30., 45. &c. Poſtquam cognita eſt chorda 24. grad. quæ eſt latus polygoni regularis 15. laterum (9.13.) etiam innoteſcet &c.

36. Omnibus his collectis habebimus ſinus, tangentes & ſecantes an-
I o I o I o I o
gulorum 45., 1. 30., 2. 15. 3. 45. 4.
I I o
30. & reliquos omnes de 45. ad 45.

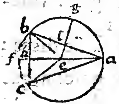
37. *Invenire ſinus omnium arcuum, qui ſunt inter duos arcus jam inventos à* 45. *ad* 45. Inſtituenda eſt regula proportionum.Exempli gratia,cum
I I
ſinus 45. ſit 1308 erit ſinus 1., 29 ut

ut $45^{I}.\ 1^{I}$ :: 1308. 29. ob eandem rationem ſinus 20^{I}. erit 581. Similiter, ut habeas ſinum $3^{o}.\ 30^{I}$. ſic procedes : cum ſinus 3. ſit 5233. (9. 35.) & præterea ſinus $3^{o}.\ 45^{I}$. ſit 6540. (9. 32.) apparet hæc 45. minuta, quæ ſunt inter 3°. & $3^{o}.\ 45^{I}$. importare 1307. augmentatione ſinus : nam ſublato 5233. ſinu 3. grad à 6540. ſinu $3^{o}.\ 45^{I}$. reſtant 1307. Si igitur volueris indagare ſinum $3^{o}.\ 30^{I}$. ſic dicês : Si 45^{I} (quæ ſunt poſt 3. grad. uſque ad $3^{o}.\ 45^{I}$.) important 1307. pro augmento ſinus, quantum augmenti inferent 30^{I}. quæ ſunt inter 3°. & $3^{o}.\ 30^{I}$. peracta operatione invenio 871 quæ partes ſi addantur ad 5233. reſultabunt 6104. pro ſinu 3. 30. & ſic in reliquis omnibus.

Hac methodo conduntur tabulæ ſive ſinuum ſive tangentium & ſecantium omnium angulorum à minutis ad minuta ab 0. *uſque ad* 90. *grad.*

Nota per hanc ultimam regulam non inveniri exacte ſinus, quia ſinus non eadem prorortione cum arcubns ſua augmenta capiunt: ſed error tam exiguus eſt, ut non neceſſum ſit exactiorem operationem inſtituere.

38. Mediantibus his tabulis computantur triangula, quia certi ſumus in quovis triangulo latera inter ſe eſſe ut ſinus angulorum oppſitorum: exempli gratia in triangulo *a b c*, ex



centro *e* circulo circumſcripto, perpendiculares *e i*, *e h*, divident bifariam latera *a b* & *b c* (4 6.) hinc *a b*. *b c* :: *a i*. *b h*. Sed *a i* eſt ſinus anguli *a e i*, vel *a c b*, qui (4. 13.) illi æqualis, & ſimiliter *b h* eſt ſinus anguli *b e h* vel *b a c*: Ergo, &c.

39. Ex hoc principio, *cognitis duobus angulis & uno latere, vel duobus lateribus & uno angulo, invenire reliqua.* Operare per regulam proportionum;

num; ut ſe habet unum latus cognitum ad ſinum anguli oppoſiti noti; ſic ſe habet alterum latus notum ad quartum numerum, qui erit ſinus anguli alteri lateri oppoſiti. Vel m. ſi duo anguli ſint cogniti cum uno latere, ſic procedendum erit; ut ſe habet ſinus anguli dati ad latus huic angulo oppoſitum: ſic ſe habet ſinus alterius anguli cogniti ad quartum numerum, qui erit latus alteri huic angulo oppoſitum &c.

40. Operationes hæ nunc in compendium redactæ ſunt: nam ſoliciti fuerunt, non tantum ſinus & tangentes in tabulas redigere, ſed etiam illorum logarithmos, è regione reſpondentes; Ita ut loco multiplicationis & diviſionis, quas labore intolerabili in calculo ſinuum & tangentium adhibere neceſſum habemus, in applicatione logarithmorum ſaltim additione vel ſubtractione utamur: ut ſi in triangulo *A B C*, (9. 18.) cujus latus *A C* eſt notum nimirum 10. ulnarum, angulus *A B C* 10. grad. angulus *C A B* 20. grad. quæreretur latus *B C*, dicendum eſſet, ut ſe habet ſinus

ſinus anguli *B* (qui in tabulis eſt

Sin. angl. A. 20. gr. A C. 10. ulnarum.	9. 5340517. 1. 0000000.
Summa Sin. ang. B. 10. gr.	10. 5340517. 0. 2 9 6 7 0 2.
Reſiduum quod eſt CB. 19. $\frac{7}{10}$ ulnarum	1. 2943815.

17364.) ad latus *AC*, quod eſt cognitum 10. ulnarum: ſic ſe habet ſinus anguli *A* (qui eſt in tabulis 34 202) ad latus *CB*. quod quæritur: ad hoc quartum *CB* inveniendum neceſſum eſſet muitiplicare ſecundum terminum 10. per tertium 34 202. & productum 342020. dividere per primum 17364. quod prolixum eſt. Sed loco horum numerorum accipimus illorum logarithmos, addendo logarithmum 20. grad. logarithmo 10. ulnarum, & à ſumma auferendo logarithmum 10. grad. & reſtabit logarithmus 1. 2943815. qui in tabula reperitur inter 19. & 20. ita ut latus *CB* ferme ſit 20. ulnarum. *Li-*

Libri, qui ſinus & logarithmos tradunt, ſpecialius hæc explicant. Nihilominus puto me tantum dixiſſe, quantum ſcire neceſſe eſt, ut quis in his omnibus proprio marte progredi poſſit. Addentur quædam aliæ proportiones hanc rem concernentes in continuatione hujus Geometriæ.

41. *Invenire rectam, quæ quàm proxime æqualis ſit circumferentiæ circuli.* Sumtâ duodecies *b d* tangente 30. grad. hiſque duodecim tangentibus ita circa circulum diſpoſitis, ut ſemper binæ & binæ ponantur in directum, ceu videre eſt in figura art. 29. in qua *d g* ſunt duæ tangentes oppoſitæ, ita ut quælibet reſpondeat 30. grad. & ſimiliter *g h*, & *d i*, &c. producetur hac ratione polygonum circumſcriptum 6. laterum, cujus circumferentia major erit circumferentia circuli (4.27.) Si verò ſinus *e c* duodecies ſumatur, cujus circumferentia minor eſt circumferentia circuli. Hinc ſi radius *a b* datus ſit partium 1, 000, 000, erit tangens *b d* 577, 350. duodecies ſumta, id eſt, 6. 928, 200, major circumferentia cir-

circuli, & ſinus *ec* 500, 000 duodecies ſumtus, nimirum 6, 000,000, minor erit circumferentia circuli.

42. Sed ſi loco tangentis & ſinus de 30. grad. quem duodecies ſumſiſti, nunc accipias tangentem & ſinum unius gradus, nimirum 17455. & 17452. conſtituentur duo polygona, alterum circumſcriptum 6, 283, 800. majus, & alterum ~~circu~~inſcriptum 6, 282, 720. minus circulo:

43. Tandem ſit radius datus 100, 000, 000, 000. & accipiatur tangens & ſinus unius minuti 21600 (nam tot ſunt minuta in circulo) conſtituetur 628, 318, 512, 000 minus (nam ſinus 1. minuti eſt 29, 088, 820.) & 628, 318, 533, 600 majus. (nam tangens 1. minuti eſt 29, 088, 821.) Et ſi hi tres numeri, radii nimirum, polygoni circumſcripti & inſcripti dividantur per 100,000, reſtabunt pro radio 1,000,000: & perimeter polygoni circūſcripti erit 6, 283, 185 $\frac{336}{1000}$ & perimeter inſcripti erit 6, 283, 185 $\frac{12}{100}$. Ita ut hæ

duæ

dūæ circumferentiæ, quarum altera eſt major circumferentiâ circuli, & altera minor, nihilominus inter ſe non differant centum milleſima parte radii. Si quis voluerit ſumere ſinum & tangentem unius ſecundæ, immenſù in modum proximior fieret æqualitas, perimetrorum polygoni circumſcripti & inſcripti.

44. In praxi aſſumitur diametrum eſſe quàm proxime ad circumferentiam ut 7. ad 22. id eſt, ſi ſemidiameter vel radius diviſus ſit in 7, circumferentia proxime continebit illarum partium 44: & hoc convenit cum eo, quod explicavimus. Nam 7. 44 :: 100. 628 $\frac{4}{7}$.

45. *Invenire aream circuli dati.* Si radius vel ſemidiameter diviſus ſit in 1000. circumferentia proxime habebit 6283. Jam multiplicata ſemiſſi hujus circumferentiæ 3141. per radium 1000. erit productum 314 1000 pro tota area circuli: (4. 31.) Si verò ſemidiameter fuerit alterius menſuræ, exempli gratia, 9. pollicum, dicendum erit 1000. 3141 ::

9.

9. 16 $\frac{269}{1000}$ & ultimus hic nume-
rus poſtea multiplicandus (qui eſſ
debet ſemicircumferentia) per 9
(qui eſt ſemidiameter) & reſultabun

173 $\frac{421}{1000}$ pro area circuli

Ut mihi videtur, magis commod
eſt hæc proportio de 1000. *ad* 3141
quam illa quæ communiter adhibetu
ut 7. *ad* 22.

46. *Metiri capacitatem parallelopi*
pedi, vel cylindri. Multiplica baſin pe
altitudinem perpendicularem.

47. *Metiri pyramidem vel conum.*
Multiplica tertiam partem baſe
per altitudinem.

48. *Metiri ſphæram.* Multiplic
tertiam partem ſuperficiei per ſem
diametrum, vel etiam duas terti
maximi circuli per diametrum.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

K. SALVARE
RESTAURO 197
Via Val Sassina, 52
Tel. 889.228